Pensamiento Numérico

Prof. Dr. L. Rico

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada. España

Presentación

La línea de investigación Pensamiento Numérico se encuentra dentro de las líneas de investigación establecidas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, y en ella se enmarca el trabajo que se presenta a continuación.

Con carácter general, denominamos Pensamiento Numérico a "la línea de estudio e investigación en Didáctica de la Matemática que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos númericos en el Sistema Educativo y en el medio social. El Pensamiento Numérico estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas.

Más en particular, el Pensamiento Numérico ha trabajado en el estudio de :

* la elaboración, codificación y comunicación de sistemas simbólicos con los que expresar los conceptos y relaciones de una estructura numérica;

* la organización, sistematización y desarrollo de diferentes actividades cognitivas que surgen y encuentran un modo de actuación en el marco de una estructura numérica;

* los modos de abordar, interpretar y, en su caso, responder a una variedad de fenómenos, cuestiones y problemas que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica" (Castro, E. 1994).

El modelo de análisis que aquí se propone tiene en cuenta:

a) unos instrumentos conceptuales: sistemas simbólicos estructurados;
b) unos modos de uso de los sistemas simbólicos: funciones cognitivas;
c) un campo de actuación: fenómenos, cuestiones y problemas.

Desde una perspectiva más amplia, el marco conceptual en el que se enmarca el Pensamiento Numérico tiene unas bases diversificadas:

1º.- Asume que la construcción del conocimiento matemático es un fenómeno social y cultural, cuya importancia para la sociedad tecnológica actual es determinante; tiene en cuenta que la educación matemática desempeña un papel relevante en la transmisión de los significados y valores compartidos en nuestra sociedad; por ello, la educación matemática debe considerar críticamente el conocimiento matemático y las acciones comunicativas mediante las que se transmite.

2º.- Considera como núcleo para su reflexión el campo de las matemáticas que comienza en la Aritmética escolar y las nociones básicas de número, avanza por los sistemas númericos superiores (enteros, racionales y decimales) y continúa con el estudio sistemático de las relaciones numéricas que aborda la teoría de números, la iniciación a los procesos infinitos que dan lugar al sistema de los números reales y algunos de los conceptos del álgebra y el análisis, vistos desde una perspectiva numérica. Denominamos conocimiento numérico a este modo de priorizar y destacar una rama determinada de la matemática.

3º Tiene una orientación esencialmente curricular, entendiendo que la orientación de la investigación en educación matemática debe resolver los problemas de la práctica escolar considerando el carácter sistémico de cualquier plan de formación en matemáticas dentro del sistema educativo. La valoración del currículo como un plan operativo con diferentes niveles de reflexión e implementación es uno de los rasgos definitorios de nuestra línea. La preocupación por los problemas que aparecen al considerar la evaluación escolar en matemáticas merecen una consideración especial.

4º.- El estudio de los errores y dificultades en la comprensión de los escolares sobre los campos conceptuales antes mencionados constituye, junto con las consideraciones cognitivas citadas, la orientación psicológica de nuestras investigaciones.

5º.- Finalmente, estamos comprometidos en la formación inicial y permanente del profesorado de matemáticas y entendemos que esta línea de investigación debe considerar entre sus objetivos prioritarios el aumento de la autonomía intelectual y profesional del educador matemático.

Representación y pensamiento numérico

La noción de representación es usual en los trabajos realizados en Educación Matemática "*Para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. (...) Para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que permita a la mente operar sobre ellas*" (Hiebert y Carpenter, 1992).

La riqueza de la noción de representación en el manejo del conocimiento numérico se puede evaluar mediante un sencillo experimento mental. Pensemos en un número no muy grande, por ejemplo 24; tomemos una hoja en blanco y anotemos sobre ella todas las imágenes, notaciones, dibujos, frases y símbolos que nos vengan a la cabeza y que asociemos con 24, que *representen* a 24.

Pronto veremos que el número de las representaciones obtenidas es muy amplio; si compartimos nuestra información con las de otras personas podemos comprobar que la lista se prolonga extensamente y que entran a formar parte de ella conocimientos muy variados, que dependen de nuestra formación matemática y de nuestro manejo profesional o cotidiano con los conceptos numéricos. Tenemos acceso así a un dato empírico: la riqueza y variedad de representaciones para los conceptos matemáticos conocidos; en particular, para los conceptos numéricos.

Todas las representaciones obtenidas en nuestro experimento mental tienen algo común: expresan de algún modo la noción de un número concreto, en nuestro caso de 24. También cada representación se manifiesta mediante un acto, una imagen o un símbolo: tiene una manifestación externa.

Las representaciones están interconectadas: cada una de ellas muestra un aspecto relevante del concepto 24. Al mismo tiempo, si las consideramos aisladamente, cada una de las representaciones puede evaluarse como formando parte de un sistema diferente. Aunque algunas sean más usuales o familiares que otras, ninguna de ellas agota nuestro concepto de 24, más bien dicho concepto se enriquece por la presencia de nuevos tipos de representación.

Una inspección somera de las representaciones escritas sobre el papel nos permite aceptar la clasificación general de las representaciones en dos grandes familias: analógicas y digitales o, dicho en términos más cercanos, representaciones simbólicas y representaciones gráficas; podemos aplicar esta clasificación a nuestros ejemplos concretos y dividir nuestra lista en dos apartados diferentes según este criterio. Aún cuando las producciones que hemos realizado sobre 24, aparentemente, no tengan importancia formal, podemos observar el interés que tienen las imágenes visuales y las representaciones gráficas para expresar los conceptos numéricos.

Objetivo y marco del trabajo

La moderna conceptualización de los números está basada en la noción de sistema; hablando con cierta precisión no nos referiremos a conceptos numéricos, simplemente, sino a sistemas o estructuras numéricas. Una estructura numérica es un conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones o modos de componer números y de unas relaciones mediante las que se comparan dichos entes; la consideración conjunta de los entes, sus operaciones y sus relaciones es lo que caracteriza una estructura numérica (Feferman, 1989).

La representación de una estructura numérica tiene tambien carácter sistémico (Kaput, 1987), por ello hablamos de sistema o sistemas de representación cuando nos referimos a una estructura numérica en su totalidad.

Objetivo central del trabajo que aquí presentamos es poner de manifiesto la pluralidad de sistemas de representación mediante los que se expresan las estructuras numéricas; en especial, queremos destacar el carácter ineludible de las representaciones gráficas para la comprensión de tales estructuras.

Sostenemos que cada sistema numérico, como complejo de entes, relaciones y operaciones, no puede expresarse en su totalidad mediante un único sistema de representación, por muy sofisticado que éste sea.

Afirmamos que las estructuras numéricas convencionales necesitan de la actuación coordinada de varios sistemas de representación para poner de manifiesto aspectos esenciales de tales estructuras. En particular, las representaciones gráficas desempeñan un papel esencial para la comprensión de las estructuras numéricas.

Nos proponemos ejemplificar las ideas anteriores mediante dos investigaciones llevadas a cabo por nosotros. La primera de ellas: "*Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*" (Castro, 1994) estudia la integración de tres sistemas de representación para los números naturales con el fin de profundizar sobre los conceptos y procedimientos implicados en la noción de sucesión de números naturales con escolares de 12- 13 años. La segunda investigación: "*La introducción al Número real en Secundaria*" (Romero, 1995), analiza la comprensión de escolares de 14- 15 años y sus limitaciones así como la construcción social de significados en el sistema de los números reales, cuando se trabaja coordinadamente sobre cuatro tipos de representaciones para tal sistema.

Antecedentes

El interés general del objetivo antes enunciado se ha puesto reiteradamente de manifiesto en los estudios e investigaciones llevados a cabo dentro de la Didáctica de la Matemática en los últimos años. A comienzos de los 80 hay dos campos conceptuales cuyo estudio sostenido se inicia en base a la noción de representación.

Uno de estos campos es el relativo al concepto de función; en los estudios realizados se destacan los diversos sistemas de representación para las funciones y la detección de algunas dificultades de comprensión sobre este concepto debidas a problemas de traducción entre dichos sistemas. Los estudios de Janvier, que culminan en su tesis en 1978, están entre los más conocidos, dando lugar posteriormente a los materiales elaborados por el Shell Centre de la Universidad de Nottigham (1986), en los que se aborda una enseñanza por diagnóstico sobre este campo conceptual, basada en las representaciones gráficas.

El segundo de los campos de estudio trabaja sobre el concepto de número racional, también sobre la base de considerar y analizar diferentes sistemas de representación para este conjunto numérico. Los trabajos de Behr, Lesh, Post y Silver (1983) se encuentran entre los pioneros en el estudio de este conjunto numérico, campo sobre el que aún se continúan ofreciendo resultados productivos, Carpenter, Fennema y Romberg (1993).

El interés del tópico se ha puesto de manifiesto con la existencia del *Working Group on Representations*, en el seno del *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, hasta el año 1995, que ha sido coordinado por investigadores tan cualificados como Goldin, Janvier y Vergnaud entre otros.Desde una aproximación semiótica muy interesante, el profesor Duval de la universidad de Estrasburgo, viene trabajando sobre la noción de representación y la comprensión de los *objetos* matemáticos desde comienzos de la década de los 80; su trabajo *Semiosis y Noesis* (1993) es una aportación valiosa en este sentido, que comentaremos más adelante.

En el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados, del INP de México se viene trabajando extensamente sobre la noción de representación y los sistemas matemáticos de signos; los trabajos de Filloy (1989), Hitt (1996), Filloy y Rojano (1993) han hecho aportaciones importantes sobre la base de estas nociones.

Vemos que la noción general de representación es compleja y se ha utilizado en la investigación en Didáctica de la Matemática de manera productiva. Sin embargo, no hemos encontrado antecedentes sobre el estudio de las nociones de sucesión de números naturales y de término general de una sucesión y sobre el concepto de número real, que se apoyen en el concepto de representación, la pluralidad de sistemas y la coordinación entre los diferentes sistemas, para una correcta comprensión de los conceptos implicados.

Sistemas de representación para el conjunto de los naturales

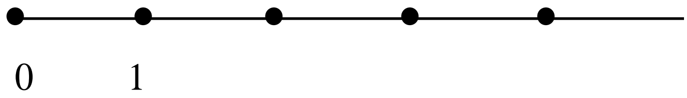
El Sistema Decimal de Numeración es una potente herramienta matemática, producto de una larga evolución histórica, inspirada por principios de economía no sólo semiótica sino operatoria, mediante la cual el hombre ha dado cauce y expresión a sus capacidades de contar, clasificar, medir y ordenar. En nuestra sociedad actual el dominio de este sistema es un hecho cultural básico; su conocimiento establece uno de los criterios para determinar que un ser humano ha adquirido las capacidades elementales que le permiten ocupar una posición intelectualmente digna en la sociedad. De ahí la importancia concedida en los sistema educativos a la transmisión y aprendizaje de la numeración decimal y de las operaciones aritméticas elementales, utilizando como sistema de representación exclusivo el Sistema Decimal de Numeración; el resto de las representaciones numéricas tienen, en el medio escolar, un carácter esporádico y anecdótico.

De este modo se llega a identificar cada uno de los números con su notación decimal y el conjunto de los naturales con la secuencia numérica. Tal identificación, aunque culturalmente útil, práctica y económica, no deja de suponer un empobrecimiento y una limitación en el aprendizaje de los números naturales. Esto se pone especialmente de manifiesto cuando comprobamos la incapacidad de la mayoría de los jóvenes para entender que, por ejemplo, la expresión factorial de los números es otra manera de representarlos, mediante la cual se pone de manifiesto su estructura multiplicativa.

El carácter dinámico del sistema de los números naturales queda bloqueado por la inercia de la representación decimal usual; dicho carácter dinámico del conjunto de los números considera que estos entes se determinan por sus relaciones mútuas. Así, conocer o saber lo que significa, por ejemplo, 24 no consiste sólo en leerlo como 2 decenas y 4 unidades; también es interpretarlo como 4 veces 6, 6 veces 4, 3 veces 8 y 8 veces 3, 2 veces 12 y 12 veces 2, siguiente a 23, anterior a 25, suma de tres números consecutivos: 7+8+9, pero no suma de dos o cuatro números consecutivos, anterior a un cuadrado: $5^2 - 1$, suma de dos números por su diferencia: $(5+1)\cdot(5-1)$; mitad de 48: 48/2; etc. Desde esta perspectiva, cada número es un nudo en el que se entrelazan una multiplicidad de relaciones, es un elemento de una red compleja fuertemente conectada, cuyo mayor o menor dominio determinará la comprensión real que cada sujeto alcance del sistema de los números naturales (Rico, 1995).

Las consideraciones anteriores ponen de manifiesto que, sobre la base de la notación decimal, hay otros sistemas de representación para los números naturales. Uno de ellos el análisis aritmético del número, bien considerado como suma o bien como producto de números más sencillos. Los ejemplos anteriores son expresiones del número 24 mediante análisis aritméticos.

Sin embargo, no hemos tenido aún en cuenta modos de representación gráfica. La recta númerica es la representación gráfica estándar. Sobre una recta cualquiera elegimos dos puntos arbitrarios a los que asignamos los valores 0 y 1; por convenio, el punto que corresponde a 0 está situado a la izquierda del punto que corresponde a 1:



A partir de 1 y hacia la derecha, se van marcando puntos que guarden entre sí la misma distancia que los dos puntos iniciales sobre los que se van señalando, consecutivamente, los números naturales. Esta representación es un artefacto útil, cuyo empleo para el dominio del sistema de los números naturales ha sido estudiado detalladamente (Resnick, 1983) y cuyo interés para la comprensión de los números reales tendremos en cuenta más adelante.

Números figurados

La historia nos pone en contacto con otro potente sistema de representación para los naturales, descuidado por el currículo actual de las matemáticas escolares. Nos referimos a las configuraciones puntuales, utilizadas para representar números figurados y que tuvieron su origen y desarrollo en el concepto de número de la escuela pitagórica.

Para los pitagóricos el número no era simplemente una etiqueta para una colección, el símbolo de una cantidad o una construcción intelectual, sino algo que tenía consistencia en sí mismo; los números eran como una suerte de átomos que, en sus diversas composiciones y relaciones, dan la esencia misma de lo que es la variedad del mundo existente.

Esta noción del número tuvo su mejor instrumento en el sistema de representación que conocemos como configuraciones puntuales o números figurados, diferente totalmente de los sistemas de numeración al uso.

Las *configuraciones puntuales* son un sistema de representación de números, basado en:

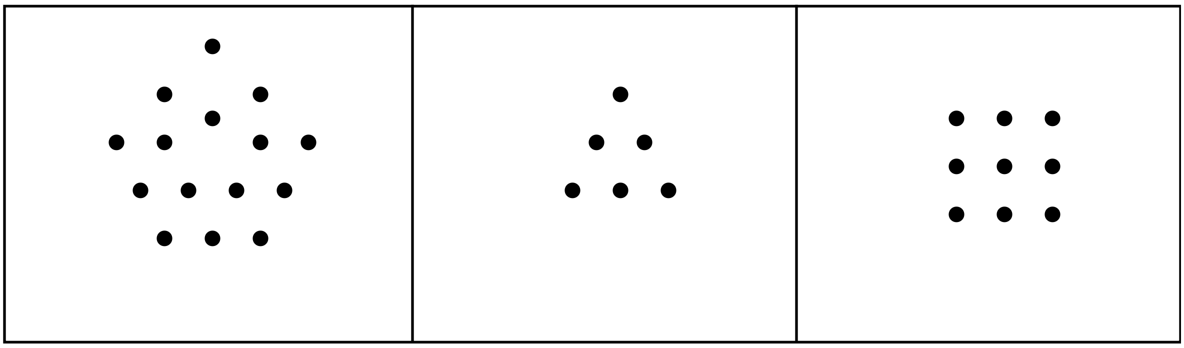
un único símbolo: el punto;

un espacio estructurado de representación, usualmente la trama cuadrada o la trama isométrica cuando trabajamos en el plano,;

un modo de organización de la cantidad de puntos que satisface criterios de simetría o regularidad convenidos y que se pueden explicitar de manera sencilla.

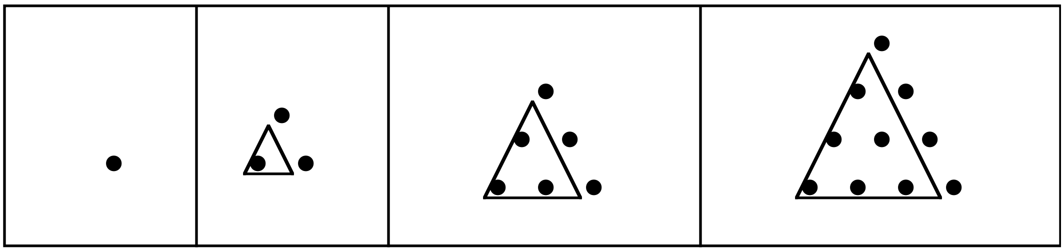
Estas tres condiciones establecen un nuevo *sistema de representación de números* (Beiler, 1966), cuya ventaja consiste en proporcionar una multitud de modelos gráficos de un mismo número, mediante los que se hace una valoración visual y un análisis de diferentes estructuras aritméticas del número

La denominación de *Números figurados* se reserva para aquellos casos en que se emplea una representación puntual en forma de figura, fundamentalmente geométrica. La idea básica de este sistema de representación es considerar cada número como un agregado de puntos o unidades distribuidos sobre una trama isométrica, según una figura geométrica plana o espacial. De este modo aparecen números triangulares, cuadrados, rectangulares, pentagonales, piramidales y cúbicos, tantos como variantes de figuras geométricas se consideren, que facilitan pensar en cada número como un todo organizado según una estructura determinada.



Al organizar geometricamente las unidades que componen un número, se consiguen dos informaciones importantes sobre ese número. Por un lado, se visualiza un análisis aritmético del número: un número triangular es una suma de números consecutivos comenzando desde 1, un cuadrado es el producto de un número por sí mismo, un rectangular es producto de dos números consecutivos, o de dos números que se diferencian en 2; este análisis permite conocer propiedades del número en cuestión y relacionarlo con muchos otros, facilitando así el dominio de los naturales como sistema, cosa que no se logra con el sistema de numeración. Un mismo número puede considerarse perteneciente a varios tipos de números figurados; así, nuestro ejemplo de referencia 24 no es un número triangular, pero si es rectangular de diferencia 2, es un número trapezoidal, y le falta una unidad para ser un cuadrado. Cada número aparece como resultado de las operaciones por las cuales se alcanza; esas operaciones establecen la configuración del grupo de puntos que constituyen el número.

En segundo lugar, distintos números comparten la estructura que representa cada tipo de configuración puntual. El análisis aritmético que expresa la configuración correspondiente se convierte en una propiedad común de todos estos números, que puede generalizarse. De este modo el sistema de representación mediante configuraciones puntuales es un instrumento para establecer propiedades generales de los números y descubrir nuevas relaciones entre ellos.



Este sistema de representación permitió históricamente a los matemáticos establecer propiedades numéricas generales e identidades algebraicas sin disponer del aparato simbólico del álgebra. El uso de números figurados lo encontramos a lo largo de la historia de la Teoría de Números y, aún hoy día, se mantienen para facilitar la introducción a esta disciplina.

Estudio de los números naturales mediante coordinación de tres sistemas de representación

El trabajo de investigación que lleva por título "*Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*" (Castro, 1994), trata de poner de manifiesto, analizar e interpretar la comprensión que muestran los escolares de 13 y 14 años de edad sobre las nociones de estructura de un número, patrones y relaciones numéricas, sucesiones y término general de una sucesión cuando se ha incorporado un sistema gráfico de simbolización para los números naturales y trabajan con tres sistemas distintos de simbolización para estos números.

La hipótesis de partida se enuncia así: el dominio sobre los números naturales supone un dominio de diferentes sistemas simbólicos, que se combinan, ante contextos y situaciones en los que intervienen diferentes niveles de complejidad. Desconocer uno de los sistemas simbólicos, aunque se dominen los restantes, supone un conocimiento deficiente de los números naturales, ya que hay relaciones estructurales entre números y cuestiones significativas que sólo se pueden abordar desde el sistema que se desconoce.

Finalidad de este trabajo es integrar en el currículo de matemáticas de Secundaria Obligatoria un sistema de representación para los números naturales que, destacando su carácter discreto, proporcione un instrumento de visualización y análisis para las sucesiones, análogo a la representación de curvas en las funciones.

Estudiamos la potencia de las representaciones denominadas configuraciones puntuales para expresar relaciones y propiedades numéricas; también estudiamos cómo, mediante dichas representaciones, se descubren y utilizan tales propiedades por los estudiantes.

Nuestro trabajo se ha centrado en el estudio de las sucesiones lineales y cuadráticas de números naturales mediante el empleo de los tres sistemas simbólicos descritos: figurativo (configuraciones puntuales), simbólico estructurado (sistema decimal de numeración) y operatorio (desarrollos aritméticos).

El estudio se resume en las referencias siguientes:

* empleo coordinado de tres sistemas de representación para números naturales: configuraciones puntuales, sistema decimal de numeración y desarrollo aritmético de los números;

* trabajo con secuencias numéricas, lineales y cuadráticas, analizando el patrón que define cada una de ellas mediante las configuraciones puntuales y los desarrollos operatorios;

* realización de las siguientes tareas: continuar una secuencia, extrapolar términos, generalizar, obtener el término general, y utilizar el término general en la obtención de términos concretos.

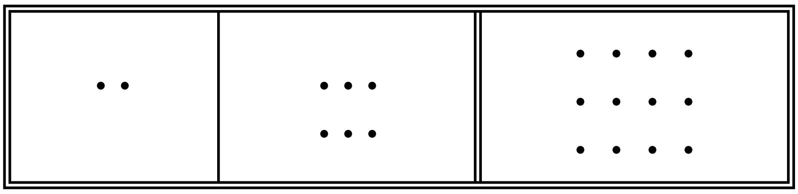
Las configuraciones puntuales permiten encontrar un esquema gráfico para representar términos de las sucesiones de primer o segundo grado, que tomen valores enteros. Asi, las progresiones aritméticas admiten representaciones puntuales sencillas, por lo general rectangulares de base o altura constantes, o variantes de esta representación; las secuencias lineales se denominan así porque la representación gráfica de sus términos puede analizarse mediante una *descomposición en líneas* y la diferencia entre dos términos se puede describir como agregación de una línea.

•   • •   • • •

•   • •   • • •

Las sucesiones de diferencias segundas constantes son aquéllas cuyo término general viene dado por un polinomio de segundo grado; más en concreto: si la diferencia segunda constante es k, el coeficiente del término de segundo grado del polinomio correspondiente es k/2. Los casos más sencillos son la sucesión de números cuadrados: $C_n = n^2$, la de los números rectangulares de diferencia de dimensión 1, $R_n = n\ (n+1)$, o de diferencia de dimensión 2, $R'_n = n(n+2)$.

La representación gráfica de los términos de estas sucesiones se puede realizar teniendo en cuenta que las dos dimensiones son variables; el paso de un término al siguiente viene dado por un aumento de superficie según las dos dimensiones. La estructura de estos números se llama *cuadrática* o *multiplicativa* y el paso de un término al siguiente no es constante sino que, al aumentar en dos dimensiones, también es variable siendo esa variación lineal.



En general, si la ley de una sucesión es $a_n = an^2 + bn + c$, con a de la forma k/2, k natural, b y c valores enteros o racionales, dicha sucesión es de diferencias segundas constantes e igual a k; si a_n toma valores naturales para todo n, entonces cada término puede representarse mediante una configuración plana poligonal, regular o irregular, manteniendo todos los términos un mismo patron de representación.

Conclusiones del primer estudio

A partir de las conexiones establecidas entre la secuencia numérica, la secuencia de representaciones y la secuencia de desarrollos aritméticos, hemos estudiado la comprensión que muestran los escolares de 12 y 13 años al establecer relaciones entre números, reconocer y utilizar patrones y proporcionar una generalización a la estructura común que tienen los términos de una secuencia.

Los trabajos realizados por los alumnos a partir de las tareas propuestas han mostrado que, de los tres sistemas empleados en la representación de números, la configuración puntual es el más intuitivo debido a su carácter gráfico, lo que permite un análisis visual de la estructura de una cantidad. Sin embargo, este sistema adquiere su mayor potencia cuando se trabaja conjuntamente con los desarrollos aritméticos y la notación decimal usual; una configuración puntual adquiere sentido cuando se emplea como visualización de un determinado desarrollo aritmético de un número. La variedad de desarrollos que puede sugerir una misma representación puntual ponen de relieve este carácter intuitivo.

A nivel aritmético, la incorporación del sistema de representación denominado *configuración puntual* proporciona un instrumento para analizar los números y obtener diferentes desarrollos aritméticos de un mismo número. El carácter operatorio que proporciona el nuevo sistema simbólico a los números naturales queda de manifiesto durante el trabajo realizado; se consigue de este modo considerar cada número mediante una diversidad de desarrollos aritméticos.

Se ponen de manifiesto las nociones de modelo y patrón de representación. Se refuerza así el concepto de que hay números que comparten *estructura aritmética*; dicha estructura se visualiza mediante un *patrón geométrico* y se expresa mediante un desarrollo aritmético. Esta noción es un primer paso hacia la generalización, sobre base aritmética.

La riqueza de *relaciones entre números* que comparten patrón es un tercer dominio de conocimientos que los alumnos ponen de manifiesto y en el que aparecen los primeros intentos de generalización en expresiones numéricas.

A nivel algebraico se comienza con el estudio sistemático de las secuencias numéricas mediante el triple sistema de representación empleado.

Un primer hallazgo se encuentra en la agilidad mostrada por los alumnos en las tareas de continuar o extrapolar términos de una secuencia mediante el uso alternativo de los diferentes sistemas de representación y las traducciones entre ellos.

Un segundo hallazgo ha sido la explicitación de un obstáculo para la noción de término general de una sucesión. De acuerdo con el triple sistema de representación, el término general de una sucesión es:

* "un número en general", "cualquier número de la sucesión" y, por tanto su expresión es **n**, al considerar la notación numérica usual;
* al emplear el patrón geométrico, la necesidad de dejar espacios vacíos entre los puntos para indicar el paso a **n** lleva a que algunos alumnos utilicen modelos continuos para el término general. Esto indica una dificultad en el manejo de este sistema;
* al emplear el desarrollo aritmético encontramos que:
  - si el desarrollo es traducción de la configuración puntual hay una diversidad de expresiones posibles de distintos niveles de complejidad; estas expresiones aunque traducen el mismo patrón no siempre se consideran equivalentes y, en ocasiones no tienen una sistematicidad;
  - si el desarrollo está dado, no suele presentar dificultad su paso al término general, pero no se admite fácilmente la obtención de una expresión simplificada equivalente.

Hemos comprobado que no hay integración entre los tres sistemas simbólicos para expresar la noción de término general de una sucesión; son muy pocos los alumnos que identifican dicho término general con la estructura operatoria común que comparten los términos de una secuencia y cuya notación más adecuada viene dada mediante el desarrollo.

También hemos detectado un segundo obstáculo algebraico: se trata de la elección de la expresión del término general en función de **n** o de **n+1**, según sea el término por el que comienza la secuencia. Muchos alumnos consideran equivalentes expresiones como $(n+1)^2-n$ y $n^2-(n-1)$.

Sistemas de representación para el Número Real

En el caso del concepto de Número Real, las *representaciones simbólicas* y las *representaciones geométricas* juegan un papel clave, puesto que permiten expresar las ideas y las relaciones constitutivas de dicho concepto y tienen un uso aceptado y establecido. Tanto en el ámbito de las notaciones simbólicas, como en el de las representaciones geométricas, poseemos un instrumento integrador fundamental para el Número Real: el sistema de Notación Decimal y el Modelo de la Recta, respectivamente.

El sistema de Notación Decimal es un sistema integrador en el dominio de las notaciones simbólicas, ya que toda notación decimal (finita, periódica o no periódica) representa un número real y, recíprocamente, cada número real puede ser expresado mediante una notación decimal. En este dominio de las notaciones simbólicas, contamos también con las notaciones habituales operatorias (fracciones, raíces cuadradas, raices enésimas), que constituyen un complemento y un apoyo importante para el sistema de Notación Decimal dentro de este ámbito.

Por otra parte, el Modelo de la recta es un sistema integrador en el dominio de las representaciones geométricas. El hecho de que la correspondencia entre los puntos de la recta y los Números Reales, realizada a través de la medida de longitudes, se conceptualice como una biyección, permite considerar importantes propiedades en el conjunto de los Números Reales, tales como el orden o la densidad, cuya interpretación mediante el continuo lineal es mucho más intuitiva y conveniente en las primeras etapas, según veremos en un apartado posterior. Para la determinación y comprensión del concepto de Número Real se considera aceptado que las representaciones gráficas desempeñan un papel esencial, sin cuya aportación el significado de tal concepto no se podría construir con precisión.

Sostenemos que ambos tipos de representación, numéricos y gráficos, son interdependientes y mutuamente complementarios para la construcción de una noción sólida del concepto de Número Real o, al menos, iniciar un estudio significativo del mismo con escolares de 14-15 años. Pasamos a describir con detalle los sistemas de representación del Número Real, teniendo en cuenta que cada sistema simbólico se caracteriza mediante las correspondientes condiciones y rasgos sintácticos y semánticos.

Sistema de Notación decimal

En el sistema de numeración decimal posicional los números enteros se expresan en términos de potencias de 10, de forma análoga a los polinomios en x, mientras que las fracciones decimales se expresan en términos de potencias de 1/10, de forma análoga a los polinomios en 1/x.

Es usual en el trabajo escolar hacer el paso de la notación fraccionaria a la decimal. Mediante el algoritmo de la división las fracciones pueden escribirse de forma justificada en notación decimal. En algunos casos obtenemos en un número finito de pasos su expresión decimal, que es igualmente finita. Sin embargo, en otros casos el algoritmo de la división no da lugar a una expresión decimal finita, sino que el cociente obtenido tiene infinitas cifras decimales. En este caso, la equivalencia de ese cociente con la fracción inicial supone una extensión del convenio previo que se estableció para los decimales exactos. La justificación formal de la equivalencia entre una fracción y una expresión decimal ilimitada viene dada por la interpretación de un decimal infinito como una serie de potencias de 1/10: $\sum a_n 1/10^{n}$ (Gardiner, 1982). Esta cuestión, desconocida por los alumnos, constituye el ejemplo más sencillo de extensión mediante el cual trascendemos los procesos finitos para tomar contacto con los procesos infinitos, que están en la raiz de las matemáticas de las magnitudes continuas.

Sin tener que descender a las profundidades de la justificación formal, los alumnos de esta edad (14- 15 años) pueden establecer razonadamente que todo número racional tiene una expresión decimal finita o infinita periódica y viceversa o, al menos, eso es lo que da por supuesto la organización curricular para el nivel correspondiente (Rico, Coriat, Marín y Palomino, 1994). En efecto, al realizar la división indicada por la expresión fraccionaria, observamos que el número de restos distintos posibles es limitado, ya que el resto ha de ser menor que el dividendo, de modo que si la división no es exacta, llegará un momento en que un resto se repita y, una vez que esto suceda, las cifras del divisor y los restos siguientes se repetirán indefinidamente en el mismo orden. Recíprocamente, los alumos de este nivel pueden razonar las reglas que permiten la conversión de un decimal finito o periódico en una fracción, aunque éstas últimas hacen uso implícito de ciertas propiedades de series numéricas al efectuar operaciones aritméticas con números de infinitas cifras.

Una vez claro que a todo número racional corresponde un decimal recurrente y viceversa, cabe preguntar qué ocurre con los decimales infinitos no recurrentes: ¿responden estas expresiones a alguna noción de número?

Si consideramos la interpretación de los decimales infinitos recurrentes como series de potencias, e interpretamos el caso de los decimales infinitos no recurrentes de la misma forma, en este segundo caso no disponemos de la recurrencia para sumar la serie. No obstante, aplicando a la sucesión de sumas finitas de la serie de potencias de 1/10 la propiedad fundamental de los números reales: toda sucesión infinita de números reales creciente y acotada superiormente por cierto número k, tiene como límite un número real a < k), entonces *a cada decimal infinito le corresponde un número real. Recíprocamente, cada número real viene dado mediante un decimal infinito*.

Este resultado muestra la potencia del simbolismo de la notación decimal para el Número Real, pero al mismo tiempo pone de manifiesto la complejidad y la sofisticación de algunos resultados que subyacen en la aparentemente sencilla notación decimal para representar los Números Reales.

La Notación operatoria habitual

Denominamos Operatoria a la Notación habitual de los Números Reales (fracciones, expresiones radicales, Pi) en el sentido de que destaca el carácter operatorio de los Números Reales, al indicar una Operación mediante cuya aplicación algorítmica obtenemos la representación decimal; este es el caso de:

-la notación de Fracción, que expresa una división indicada;

-la notación habitual de los Irracionales algebraicos, que viene dada a partir del proceso de resolución de una ecuación, de la que son ejemplos sencillos los irracionales cuadráticos;

-la notación habitual de irracionales trascendentes conocidos, en los que a partir del "nombre" tenemos acceso a métodos para su aproximación decimal.

Aunque los alumnos de los primeros niveles en los que se introduce el Número Real se enfrentan por primera vez a los decimales infinitos no periódicos sin tener la posibilidad de comprender aún las justificaciones formales en las que se fundamentan, la simultaneidad de la Notación Decimal con la Notación habitual constituye un apoyo para el trabajo con este tipo de expresiones decimales y su aceptación por parte de los alumnos.

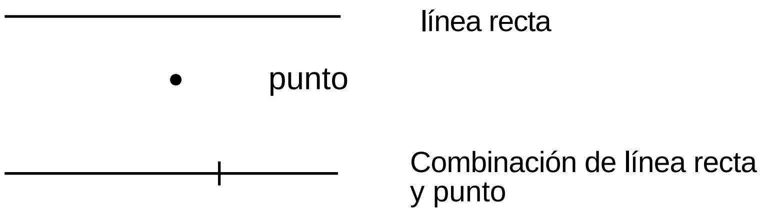
Representaciones geométricas del Número Real

El modelo de la Recta Real

Por recta real se entiende un sistema de imágenes, signos, reglas y convenios mediante los que se realiza una representación geométrica de los Números Reales y se interpretan sus operaciones sobre una línea recta. Constituye el segundo instrumento integrador fundamental para su estudio, que tomamos como referencia para enfocar nuestra investigación.

El análisis de la recta real incluye dos niveles. En un primer nivel encontramos:

1) Imágenes específicas:



2) Convenios de carácter general:

a) Una marca en la recta (punto) representa un número, y recíprocamente.

b) Los números 0 y 1 pueden elegirse arbitrariamente entre los puntos de la recta; para establecer la aplicación de R en la recta hay que fijar esos puntos.

c) El orden izquierda-derecha entre los puntos de la recta corresponde al orden usual entre los números; esto lleva a que los puntos a la izquierda de 0 correspondan a los números negativos y que los puntos a la derecha de 0 correspondan a los números positivos.

3) Reglas para representar los números:

a) Ley de la aplicación de R en la recta: la medida de longitudes;

b) Criterio para representar el punto que corresponde a la suma de dos números;

c) Criterio para representar el punto que corresponde a un producto.

En un segundo nivel de análisis entra la consideración del continuo lineal, que soporta la interpretación geométrica del conjunto de los Números Reales. El sistema axiomático sobre el que se fundamenta dicho continuo lineal impone una lógica y unas propiedades al conjunto numérico, difíciles de expresar y argumentar en términos de simples notaciones numéricas; ésta es precisamente una de las claves por las que la Recta Numérica se convierte en un sistema de representación ineludible para la comprensión del concepto de número real.

Los alumnos han tenido contacto con el modelo de la recta desde la educación primaria; han estudiado la representación en la misma de los números Naturales, Enteros y Racionales. El criterio mediante el cual un número, Racional o Irracional, es asignado a un punto de la recta es el de la Medida de Longitudes; a un número determinado le corresponde el punto extremo del segmento con origen en 0, tal que la medida de dicho segmento con respecto al segmento unidad (origen 0 y extremo 1) viene dada por el número en cuestión. Este criterio se maneja de forma implícita. Sin embargo, hemos señalado que la clave para considerar a la Recta como modelo de los Números Reales es la consideración de la biyectividad de la correspondencia números-puntos de la recta. Si se quiere empezar a trabajar de modo consistente con el modelo de la Recta, consideramos que es necesario profundizar en esta cuestión, es decir, en el estudio de la Correspondencia Números-Puntos de la recta y en su carácter biyectivo.

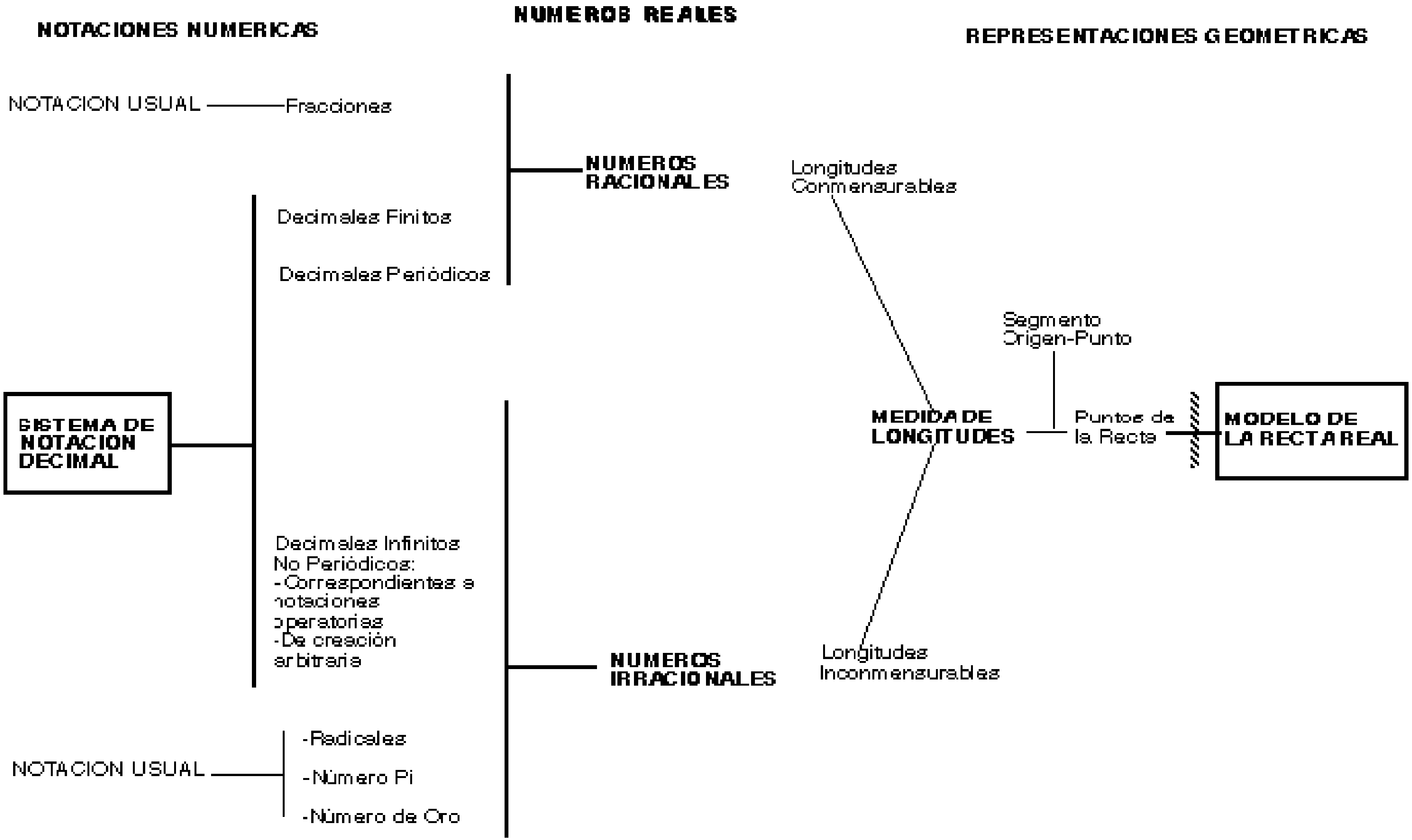
Hemos de tener presente que el modelo de la Recta, en su aparente simplicidad, encierra una complejidad considerable y es importante tener en cuenta que R no es el único conjunto numérico que se representa isomorfamente mediante dicho modelo, sino que también el conjunto de los Hiperreales hace uso de gran parte de los signos y convenios considerados (Tall, 1980).

Conexiones entre los sistemas de representación

Una vez descritos los Sistemas de Representación de los Números Reales, avanzaremos en nuestro estudio sobre su comprensión apoyándonos en los siguientes supuestos cognitivos. En primer lugar, consideramos que existen relaciones entre las representaciones externas y las internas. En segundo lugar, asumimos que las representaciones internas pueden ser relacionadas o conectadas entre sí. Además, la naturaleza de las representaciones matemáticas externas influye en la naturaleza de las representaciones matemáticas internas y, recíprocamente, la forma en que un alumno genera e interpreta representaciones externas proporciona información acerca de cómo el alumno ha representado esa información internamente (Hiebert y Carpenter, 1992).

Si nuestro objetivo es favorecer la comprensión en los alumnos, y está comprensión viene dada por el dominio de cada uno de estos sistemas y la coordinación entre ellos, parece claro, a la vista de los presupuestos anteriores, que para lograrlo hay que incrementar las conexiones entre los sistemas de representación de este concepto, tanto dentro de cada sistema como entre sistemas diferentes.

En el mapa siguiente, pueden verse algunas de las relaciones y correspondencias entre los distintos sistemas de representación del Número Real presentados anteriormente.


NOTACIONES NUMERICAS
NUMEROS REALES
REPRESENTACIONES GEOMETRICAS
NOTACION USUAL
Fracciones
NUMEROS RACIONALES
Longitudes Conmensurables
Decimales Finitos
Decimales Periódicos
Segmento Origen-Punto
SISTEMA DE NOTACION DECIMAL
MEDIDA DE LONGITUDES
Puntos de la Recta
MODELO DE LA RECTA REAL
Decimales Infinitos No Periódicos:
-Correspondientes a notaciones operatorias
-De creación arbitraria
NUMEROS IRRACIONALES
Longitudes Inconmensurables
NOTACION USUAL
-Radicales
-Número Pi
-Número de Oro

Pasamos a presentar una serie de argumentos que, a nuestro juicio, avalan la importancia y limitaciones de cada uno de los sistemas de representación simbólicos y geométricos de los Números Reales y de la conexión entre los mismos.

Situándonos en la perspectiva del curriculum de matemáticas de la Educación Secundaria, a partir de los conocimientos aritméticos de nuestros alumnos, el problema de la irracionalidad, simplemente, no tiene lugar. Así pues, su introducción a los estudiantes requiere una evolución cualitativamente importante en su pensamiento matemático. Esta modificación no se produce espontáneamente, mientras se evita el problema de la irracionalidad y se pospone a la espera de que la presentación formal del concepto solucione un conflicto que no se entiende como tal, porque nunca ha sido planteado. El problema de la irracionalidad adquiere plena significación en el contexto geométrico, más concretamente, en el terreno de la medida. *"Sin la presión de los problemas de la medida, R no habría respondido más que a problemas matemáticos extremadamente elaborados"* (Douady, 1980).

La idea intuitiva inicial de que dos magnitudes, y más concretamente, dos longitudes, tienen una parte alícuota común es, sin duda, una etapa inevitable en el desarrollo del conocimiento matemático, tanto en el plano histórico como en el plano individual. Pero esta intuición puede convertirse en un obstáculo para la comprensión del problema de la irracionalidad.

El reconocimiento del fenómeno de la inconmensurabilidad en el dominio geométrico implica el paso de un estadio donde la figura sirve de útil de prueba al estadio en que la geometría se convierte en *"el arte de los razonamientos ciertos sobre figuras falsas"*. En efecto, es absolutamente imposible constatar la inconmensurabilidad sobre una figura; al contrario, de la experiencia práctica e inmediata se sigue la conmensurabilidad, ya que la percepción y las necesidades prácticas se satisfacen en un número finito de pasos. Así que la conmensurabilidad no puede concernir más que a objetos matemáticos ideales, y no puede mostrarse, sino que precisaría entonces de una demostración *en el sentido de deducción a partir de unos axiomas* . Junto con el problema anterior, en cualquier demostración geométrica sobre inconmensurabilidad subyace el problema de los procesos infinitos.

La irracionalidad de los radicales cuadráticos, considerada desde el punto de vista numérico, se aborda siguiendo métodos basados en la reducción al absurdo, lo que supone grandes dificultades para el razonamiento de los alumnos (Tall, 1978), especialmente a un nivel introductorio. Cuando se pretende resolver el problema de la irracionalidad planteándolo exclusivamente en el terreno de la aritmética, resulta bastante pobre en significatividad. Los razonamientos por reducción al absurdo son la forma elegante de eludir el inevitable proceso infinito que surge cuando se trata de ir obteniendo las sucesivas aproximaciones decimales (por exceso o por defecto) de los radicales cuadráticos, sobre las que nos es posible comprobar la irracionalidad.

La noción "intuitiva" o "a priori" de Continuo Lineal, o de la recta geométrica, es fuente de numerosas dificultades, contradicciones y paradojas (Romero i Chiesa), que también implican la noción de infinito. Estas dificultades se ponen de manifiesto cuando consideramos que mediante la representación geométrica y mediante verificación empírica no podemos detectar diferencias entre densidad y continuidad. Para hacer inteligible dicha diferencia es necesario un nivel más elevado de representación, que incluye la idea de potencia de un conjunto, es decir, su cardinal (Moreno y Waldegg, 1991).

Estas reflexiones resumen algunas consideraciones epistemológicas sobre el concepto de Número Real, los problemas principales de los que surge y a los que se enfrenta, así como sobre las dificultades para la coordinación de los sistemas de reperesentación sobre los que se estructura.

Resultados del estudio sobre números reales

Los siguientes resultados fueron obtenidos en una experiencia de investigación-acción que se llevó a cabo con un curso de alumnos de nivel 1º de B.U.P. en un instituto de Bachillerato de la provincia de Granada (España), e ilustran, de modo empírico, la tesis que venimos sosteniendo.

-Uno de los conflictos importantes que surgen desde el primer momento para los alumnos es la cuestión de que exista una correspondencia biyectiva entre las fracciones y los decimales finitos o periódicos y, sin embargo, el número pi sea infinito no periódico (según el conocimiento establecido) y provenga, según los alumnos de un fracción, a saber, de la fracción Longitud de la circunferencia / Diámetro de la misma. Para los alumnos, todas las razones son fracciones (es decir, razones entre enteros), porque no han tenido contacto con razones inconmensurables. Sólo después del trabajo reiterado con este tipo de razones en múltiples experiencias, los alumnos son capaces de acuñar un término: el de "proporción", para referirse a la relación entre longitudes que no pueden ser expresadas mediante una fracción.

-También se observó una evolución en la conceptualización de los alumnos a lo largo del proceso didáctico sobre los tipos de número que puede corresponder a un punto cualquiera de la recta real, motivada por sus experiencias en el terreno de la medida y más concretamente, en el terreno de las medidas inconmensurables pero construibles. En un principio rechazan el que a un punto de la recta pueda corresponderle un decimal infinito. Después de construir longitudes inconmensurables piensan que a un punto de la recta también puede corresponderle un irracional construible. Al final del proceso didáctico, aproximadamente la mitad de los alumnos piensan que a un punto dado de la recta puede corresponderle un número racional o irracional construible.

A propósito de la comprensión de los alumnos sobre qué números llenan la recta, cómo es la correspondencia números-recta, las respuestas de los alumnos, revelaron la creencia de que los racionales no llenan la recta debido a la necesidad de "finalizar el proceso infinito" de colocarlos todos y a la imposibilidad de hacerlo; también se registran opiniones afirmativas por la creencia en la biyectividad de dos conjuntos infinitos (a saber, el de los números y el de los puntos de la recta), u otras que afirman la imposibilidad de decidir que tipo de correspondencia habrá entre dos conjuntos si el número de sus elementos es infinito. *Los argumentos expresados por los alumnos ponen de manifiesto que la cuestión, hace aflorar sus intuiciones más primitivas sobre la estructura del continuo lineal, sobre la correspondencia entre esta estructura y sus nociones acerca de los números, sobre el cardinal de los conjuntos infinitos y la correspondencia entre ellos y, en especial, sobre la no existencia de un final para los procesos infinitos.*

Estos son puntos clave para la comprensión del concepto de Número Real y de su estructura topológica; sin embargo, el trabajo con alumnos de primeros niveles sobre este tópico resulta problemático, ya que supone el manejo de instrumentos matemáticos basados en el uso riguroso de los procesos infinitos, y por tanto, con un gran nivel de sofisticación.

-En otro orden de cosas, para detectar la comprensión de los alumnos sobre la dicotomía racionales / irracionales, les fue formulada la pregunta "qué aportan los números irracionales a los números racionales". Las respuestas de los alumnos se refirieron a las medidas de ciertas longitudes que no se podían medir con números racionales (por ejemplo, la longitud del lado de un cuadrado de área 2 ó el número Pi), y a los que ellos habían denominado con el término "proporción" a raiz de sus trabajos con la proporción aúrea, como ya hemos mencionado. También aludieron a la resolución de ecuaciones cuyas soluciones no podían se expresadas mediante números racionales. Sin embargo, cuando la profesora argumentó que los decimales infinitos no periódicos, correspondientes a los irracionales, venían a completar todos los tipos de notaciones decimales posibles, el razonamiento no resultó en absoluto significativo para los alumnos, y bastantes dieron muestras de no entender.

-Por último, podemos mencionar el conflicto que sale a la luz entre la infinitud potencial de la representación simbólica y la finitud actual de la representación geométrica en el caso de algunos irracionales, conflicto que subyace a la noción de magnitud continua. La mayoría de los alumnos encuentra muy difícil aceptar que el lado de un cuadrado de área 3 tenga una longitud finita y su expresión numérica sea infinita no periódica. Para ellos, el lado del cuadrado no puede medir "exactamente" √3 por este motivo; a tal punto que una alumna se negaba a unir el lado que estaba pintando en un cuadrado de área 3 con el extremo del lado contiguo, porque entonces el lado que estaba dibujando no correspondería a su expresión numérica (infinita) La cuestión de la exactitud de la medida de los lados de los cuadrados es realmente interesante. Se llega a que la medida de un lado es un número que multiplicado por sí mismo da 3, y ese número no tiene una expresión decimal exacta ni controlable. Entonces la exactitud de la medida del lado de un cuadrado no puede establecerse en el terreno numérico, sino que se refiere en última instancia a que un lado multiplicado por sí mismo da como resultado el área; es decir, entramos en el terreno del razonamiento puramente geométrico. Este punto es realmente sutil y queda totalmente fuera del alcance del trabajo con alumno en los primeros niveles. En definitiva, por lo que se refiere al conflicto que se plantea a los alumnos ante la expresión decimal infinita de determinadas medidas finitas y delimitadas, creemos que este tiene razón de ser, y es difícil de solucionar porque implica el paso de considerar una expresión decimal infinita como un proceso, a considerarla como un ente, en términos de infinito actual.

Como vemos, la coordinación entre los diferentes sistemas de representación es muy escasa y plantea dificultades considerables.

Conclusión

Una psicología de las matemáticas que trate directa y explícitamente de la interacción entre la estructura del contenido y la naturaleza del pensamiento humano puede servir de base para el desarrollo de la teoria y para la práctica de la enseñanza en este campo.

Nuestro propósito ha ido encaminado a poner de manifiesto la utilidad del análisis de las estructuras numéricas mediante las nociones de representación y sistemas de representación. De esta manera hemos puesto de manifiesto parte de la complejidad conceptual y de las relaciones implicadas en el concepto de número natural y en el concepto de número real.

Hemos tratado de justificar la pluralidad de representaciones presentes y necesarias para el conocimiento de esas estructuras numéricas; hemos destacado las facetas que cada sistema pone de manifiesto y hemos visto algunas de las posibilidades y limitaciones de los mismos. Esto ha permitido plantear la necesidad de coordinación entre diferentes sistemas para la comprensión de las estructuras numéricas implicadas. Los ejemplos aportados en nuestras investigaciones señalan claramente en esta dirección.

Si la comprensión implica una coordinacion de sistemas de representación, entonces el principal reto del aprendizaje de estructuras numéricas no puede reducirse a la automatización de reglas operatorias, sino que debe de consistir en la coordinación de los diferentes sistemas de representación en los que tales reglas adquieren su significado.

Sin embargo, en el currículo de las matemáticas escolares no se dispone de información suficiente sobre los sistemas de representación adecuados para las estructuras numéricas convencionales, tampoco sobre las funciones cognitivas que destacan cada uno de tales sistemas, menos aún sobre las posibilidades de coordinación entre los sistemas y los aspectos conceptuales y procedimentales que surgen de estas coordinaciones. El diseño de tareas y secuencias de instrucción necesita del desarrollo y conclusión de investigaciones sobre estas cuestiones.

Para continuar investigando en este campo se hace necesaria una mayor integración entre las disciplinas académicas. Esto es necesario porque los problemas reales de aprendizaje de las matemáticas no saben de divisiones administrativas entre áreas de conocimiento.

Esta es nuestra obligación como profesionales de la educación y como responsables de la formación de los jóvenes en una sociedad que se pretende más justa y solidaria.

Referencias

Beiler, A. (1966). *Recreations in the theory of numbers.* New York: Dover.

Behr, M.; Lesh, R.; Post y Siver, E. (1983). Rational Number Concepts, en Lesh, R. y Landau, M. (edts.) *Acquisition of Mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press.

Carpenter, T.; Fennema, E.; Romberg, T. (1993). *Rational Numbers. An Integration of Research*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Castro, E. (1994). *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de secundaria (12-14 años)* Tesis Doctoral*.* Granada: Comares.

Douady, R. (1980). Approche des nombres réels en situation d´apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11, 77-110.

Duval, R. (1993). *Semiosis et Noesis,* en Lecturas en Didáctica de la Matemática: Escuela Francesa. México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Feferman, S. (1989) *The Number Systems. Foundations of Algebra and Analysis*. New York: Chelsea Publishing Company.

Filloy, E. (1989) *Enseñanza de las Ciencias*

Filloy, E. & Rojano, T. (1993). *Translating from natural language to Algebra and viceversa*. Proceedings PME-NA. Virginia.

Gardiner, A. (1982). *Infinite Processes.* New York: Springer-Verlag.

Golding, G. (1993). *The IGPME Working Group on Representations.* En Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psicology of Mathematics Education. Tsukuba: University of Tsukuva.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). *Learning and teaching with understanding.* En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Grouws, D.A. (Ed.). New York: Mac-Millan Publishing Company.

Hitt, F. (1996) Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behaviou*r, 2nd issue (in press).

Janvier, C. (1978) *The Interpretation of complex cartesian graph representing situations - studies and teaching experiments*. Doctoral dissertation. Nottingham: University of Nottingham.

Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics.* London: Lawrence Earlbaum Associated, publishers.

Kaput, J. (1987). *Representation systems and Mathematics*. En Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Janvier, C. (ed). Hillsdale: LEA.

Moreno, L. y Waldeg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 211-231.

Resnick, L. (1983). *A developmental theory of number understanding.* En The development of mathematical thinking. Ginsburg, H. P. (ed). Orlando: Academid Press.

Rico, L. ; Coriat, M.; Marín, A y Palomino, G. (1994). *Matemáticas 4º. Opción A. E.S.O. Proyecto 2000.* Sevilla: Algaida.

Rico, L. (1995) *Conocimiento Numérico y Formación del Profesorado*. Granada: Universidad de Granada

Romero, I. (1995). *La introducción del Número Real en Educación Secundaria.* Granada: Tesis Doctoral.

Romero i Chesa, C. Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario. Pendiente de publicación en *Enseñanza de las Ciencias.*

Shell Centre (1986). *The language of functions and graphs: An examination module for secondary school*. Manchester: Joint Matriculation Board.

Tall, D. y Schwarzenberger, R. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44-49.

Tall, D. (1980). The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics,* 11, 271-284.