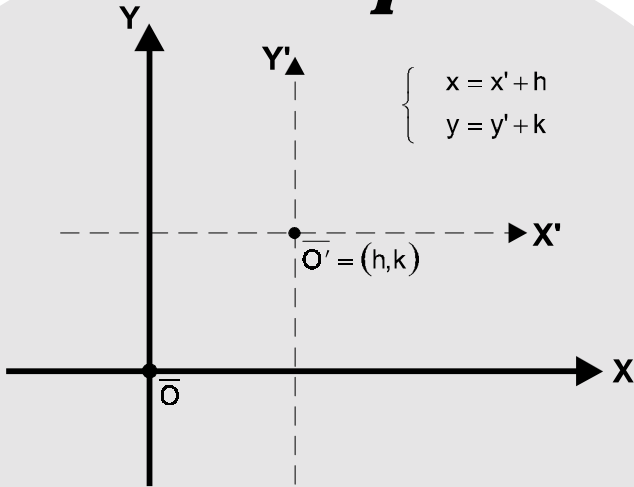


# Capítulo 5



## TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

**39** Por una traslación de ejes, transformar la ecuación:

$$3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0$$

en otra que carezca de términos de primer grado.

*Solución:*

Completando cuadrados:

$$3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0$$

$$3(x^2 - 14x + 49) - 2(y^2 + 2y + 1) = -133 + 147 - 2$$

$$3(x - 7)^2 - 2(y + 1)^2 = 12$$

Siendo:  $\begin{cases} xN = x - 7 \\ yN = y + 1 \end{cases} \rightarrow \boxed{3xN^2 - 2yN^2 = 12}$

**40** Simplificar la ecuación:

$$72x^2 + 36y^2 - 48x + 36y - 55 = 0$$

por una traslación de los ejes coordenados.

*Solución:*

Completando cuadrados :

$$72x^2 + 36y^2 - 48x + 36y - 55 = 0$$

$$72\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + 36(y^2 + y + 1) = 55 + 8 + 9$$

$$72\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 36\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 72$$

$$2\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

$$\text{Siendo: } \begin{cases} x_{\mathbf{N}} = x - \frac{1}{3} \\ y_{\mathbf{N}} = y + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{2x_{\mathbf{N}}^2 + y_{\mathbf{N}}^2 = 2}$$

**41** Por una traslación de ejes, simplificar la ecuación:

$$x^2 - 2y^2 + 8x + 4y - 3 = 0$$

*Solución:*

Completando cuadrados en la expresión, se tiene :

$$(x^2 - 8x + 16) - 2(y^2 - 2y + 1) = 3 + 16 - 2$$

$$(x - 4)^2 - 2(y - 1)^2 = 17$$

$$\text{Siendo: } \begin{cases} x_{\mathbf{N}} = x - 4 \\ y_{\mathbf{N}} = y - 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_{\mathbf{N}}^2 - 2y_{\mathbf{N}}^2 = 17}$$

- 42** Por medio de una traslación de ejes, eliminar los términos de primer grado de la ecuación:  $2xy - x - y + 4 = 0$

*Solución:*

$$2xy - x - y + 4 = 0 \longrightarrow \textcircled{1}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = x_{N+} + h \\ y = y_{N+} + k \end{cases} \longrightarrow \textcircled{2}$$

② en ①:

$$2(x_{N+} + h)(y_{N+} + k) - (x_{N+} + h) - (y_{N+} + k)$$

$$2x_{N+}y_{N+} + 2kx_{N+} + 2ky_{N+} + 2hk - x_{N+} - h - y_{N+} - k + 4$$

$$2x_{N+}y_{N+} + (2k-1)x_{N+} + (2h-1)y_{N+} + 2hk - h - k + 4 = 0 \longrightarrow \textcircled{3}$$

$$\text{De donde: } \begin{cases} 2k-1=0 \\ 2h-1=0 \end{cases} \rightarrow h = k = \frac{1}{2}$$

Luego en ③:

$$2x_{N+}y_{N+} + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 4 = 0 \rightarrow \boxed{4x_{N+}y_{N+} + 7 = 0}$$

- 43** Por una rotación de los ejes coordenados, transformar la ecuación:

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25x = 0$$

en otra que carezca del término en  $xy$ .

*Solución:*

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25x = 0 \longrightarrow \textcircled{1}$$

$$\text{Luego: } \begin{cases} x = x_{N'} \cos \theta - y_{N'} \sin \theta \\ y = x_{N'} \sin \theta + y_{N'} \cos \theta \end{cases} \longrightarrow \textcircled{2}$$

## Capítulo 5. TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

Ahora ② en ①:

$$\begin{aligned} & (16\cos^2\theta + 24\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 9\operatorname{sen}^2\theta)x^2 + \\ & + (16\operatorname{sen}^2\theta - 24\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 9\cos^2\theta)y^2 + \\ & + (24\cos^2\theta - 32\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 24\operatorname{sen}^2\theta + 18\operatorname{sen}\theta\cos\theta)xy + \\ & + 25x\cos\theta - 25y\operatorname{sen}\theta = 0 \longrightarrow \otimes \end{aligned}$$

Luego para eliminar el término  $xy$  e  $xy$

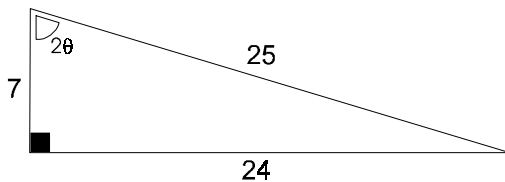
$$\begin{aligned} \Rightarrow 24\cos^2\theta - 32\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 24\operatorname{sen}^2\theta + 18\operatorname{sen}\theta\cos\theta &= 0 \\ 24\cos^2\theta - 24\operatorname{sen}^2\theta - 14\operatorname{sen}\theta\cos\theta &= 0 \\ 24(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) - 14\operatorname{sen}\theta\cos\theta &= 0 \\ 24\cos 2\theta - 7 \times 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta &= 0 \\ 24\cos 2\theta - 7\operatorname{sen} 2\theta &= 0 \end{aligned}$$

Dividiendo  $\times \cos 2\theta$ :

$$\Rightarrow 24 - 7\operatorname{tg} 2\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\theta = \frac{24}{7}$$

Luego de la figura:

$$\Rightarrow \cos 2\theta = \frac{7}{25}$$



Además:

$$\circ \operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$$

$$\circ \cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5}$$

En  $\otimes$ :

$$\rightarrow (4\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta)^2 x^2 + (4\operatorname{sen}\theta + 3\cos\theta) y^2 + 25x\cos\theta - 25y\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\left(4 \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5}\right)^2 x^2 + \left(4 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{4}{5}\right) y^2 + 25 \cdot \frac{4}{5} x - 25 \cdot \frac{3}{5} y = 0$$

$$25x^2 + 20xy - 15y = 0$$

$$\rightarrow \boxed{5x^2 + 4xy - 3y = 0}$$

**44** Simplificar la ecuación:

$$x^2 - 10xy + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0$$

por transformación de coordenadas.

*Solución:*

$$x^2 - 10xy + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0 \longrightarrow \textcircled{1}$$

$$\text{Luego: } \begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \longrightarrow \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$  en  $\textcircled{1}$ :

$$x'^2 + 2hx' + h^2 - 10x'y' - 10kx' - 10hy' - 10hk + y'^2 + 2ky' + k^2 - 10x' - 10h + 2y' + 2k + 13 = 0$$

$$x'^2 + y'^2 + (2h - 10k - 10)x' + (2 + 2k - 10h)y' + k^2 - 10hk - 10h + 2k + 13 = 0 \longrightarrow \otimes$$

Para eliminar los términos  $x'$  e  $y'$ , debe cumplirse que

$$\begin{cases} 2h - 10k - 10 = 0 \\ 2 + 2k - 10h = 0 \end{cases} \rightarrow h = 0; \quad k = -1$$

En  $\otimes$ :

$$\begin{aligned} \rightarrow x^2 + y^2 - 10xy + 1 - 2 + 13 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 10xy + 12 &= 0 \quad \dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\text{Pero: } \left. \begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{4}$  en  $\textcircled{3}$ :

$$\begin{aligned} \rightarrow x^2 \cos^2 \theta - 2xy \sin \theta \cos \theta + y^2 \sin^2 \theta + x^2 \sin^2 \theta + \\ + 2xy \sin \theta \cos \theta + y^2 \cos^2 \theta - 10 + x^2 \sin \theta \cos \theta - \\ - 10xy \cos^2 \theta + 10xy \sin \theta + 10y^2 \sin \theta \cos \theta + 12 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 10 \sin \theta \cos \theta) x^2 + \\ (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 10 \sin \theta \cos \theta) y^2 + \\ + (2 \sin \theta \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \theta - 10 \cos^2 \theta + 10 \sin^2 \theta) xy + 12 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow (1 - 10 \sin \theta \cos \theta) x^2 + (1 + 10 \sin \theta \cos \theta) y^2 + \\ + (-10 \cos^2 \theta + 10 \sin^2 \theta) xy - 12 = 0 \quad \dots\dots \oplus \end{aligned}$$

Ahora para eliminar el término  $x'y'$ :

$$\begin{aligned} \rightarrow -10 \cos^2 \theta + 10 \sin^2 \theta &= 0 \\ -10(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 0 \quad \rightarrow \cos 2\theta = 0$$

Además :

$$\circ \operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\circ \operatorname{cos} \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Reemplazando en  $\oplus$  :

$$\rightarrow \left(1 - 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) x_{NN}^2 + \left(1 + 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) y_{NN}^2 + 12 = 0$$

$$(1 - 5) x_{NN}^2 + (1 + 5) y_{NN}^2 + 12 = 0$$

$$-4x_{NN}^2 + 6y_{NN}^2 + 12 = 0$$

Dividiendo  $\times 2$  :

$$\rightarrow 2x_{NN}^2 - 3y_{NN}^2 - 6 = 0$$

- 45** Un punto  $\bar{P}$  se mueve de tal modo que la diferencia de sus distancias a los dos puntos  $\bar{A} = (1,4)$  y  $\bar{B} = (-2,1)$  es siempre igual a 3. Hallar la ecuación del lugar geométrico y simplificarla por transformación de coordenadas.

*Solución:*

Sea  $\bar{P} = (x,y)$  el punto que se mueve.

De la condición :

$$\rightarrow |AP| - |BP| = 3$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} - \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = 3$$

Efectuando operaciones se tiene :

$$\rightarrow 20x - 4y - 8xy + 9 = 0 \longrightarrow \textcircled{1}$$

Pero :

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} x = xN + h \\ y = yN + k \end{array} \right\} \longrightarrow \textcircled{2}$$

Luego :

$$\rightarrow (20 - 8k)xN - (4 + 8h)yN - 8xNyN + 20h - 4k - 8hk + 9 = 0 \longrightarrow \textcircled{3}$$

Ahora para eliminar los términos  $xN$  e  $yN$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} 20 - 8k = 0 \\ 4 + 8h = 0 \end{array} \right\} \rightarrow h = \frac{5}{2}; k = -\frac{1}{2}$$

② en ③ :

$$\rightarrow -8xNyN + 10\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{5}{2}\right) - 8\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) + 9 = 0$$

$$-8xNyN - 10 - 10 + 10 + 9 = 0$$

$$\rightarrow \underline{-8xNyN - 9 = 0}$$