Actividad 8: Lectura Capítulo 4

Fecha de inicio	Fecha de Cierre
10/OCT/13 00:00	02/NOV/13 23:55

Conceptualización de relaciones y funciones Relaciones

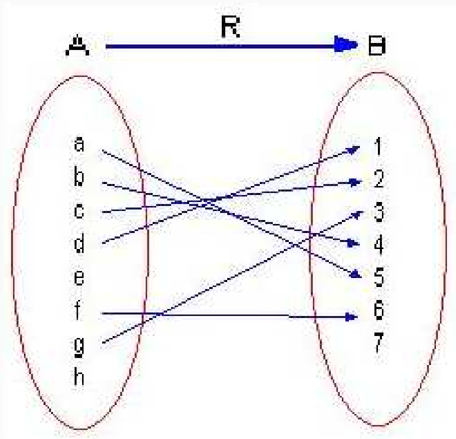
Relaciones:

$$\boxed{f : R \rightarrow R}$$

En el mundo que nos rodea, existen relaciones entre dos conjuntos, por ejemplo la relación entre Temperatura y Altitud, la cual establece que a mayor altitud, menor temperatura. Otro caso es la relación entre le número de kilómetros recorridos y el costo del servicio en un taxi, el cual está relacionado que a mayor kilometraje, mayor costo del servicio. Así existen muchas relaciones entre dos conjuntos.

El concepto de relación esta asociado a una <u>*condición*</u> entre dos conjuntos, de tal manera que a cada elemento del conjunto de partida, le corresponde un o varios elementos del conjunto de llegada.

Las relaciones se pueden representar por medio de los diagramas de Venn.



Las parejas ordenadas graficadas son:

(a, 5), (b, 4), (c, 2), (d, 1), (f, 6), (g, 3)

Según la teoría:

A = Conjunto de partida

B = Conjunto de llegada

R = Relación entre cada para ordenado.

Componentes de Una Relación:

Toda relación presenta varios componentes.

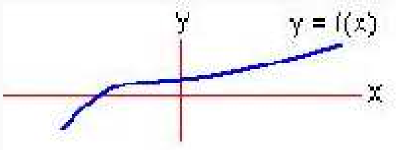
Dominio: Corresponden a todos los elementos que conforman el conjunto de partida; es decir, los elementos del conjunto A.

Codominio ó Rango: Corresponde a los elementos que conforman el conjunto de llegada; es decir, los elementos del conjunto B.

Regla o Norma: Corresponde a la forma en que se asocian los elementos del dominio y el codominio, generalmente se representa con la R.

Funciones

Funciones:



Uno de los conceptos más importantes en Matemáticas es el de Función, ya que en las ciencias puras y aplicadas son fundamentales para analizar diferentes fenómenos. En Biología el crecimiento de los organismos es modelado por una función exponencial, en Economía para la descripción del costo ó utilidad de un artículo, en Física el análisis del movimiento se modela por funciones polinómicas, etc.

Dentro del análisis de funciones, hay algunos conceptos que son pertinentes mencionar.

Variables: Se puede decir que es todo aquello que cambia a través del tiempo o espacio, el mismo espacio y tiempo se consideran variables. La clave de este concepto es que ocurre cambio, ya que si esto sucede, se dice que ocurrió variación. En el estudio de funciones se conocen dos tipos de variables. ***VARIABLE INDEPENDIENTE***: Se considera aquella que se define por si misma, una de esas por su naturaleza es el tiempo, pero existen otras. Esta variable por lo general se ubica en el eje de las abscisas del plano cartesiano; es decir, en el eje *x*. ***VARIABLE DEPENDIENTE***: Como su nombre lo indica, son aquellas que quedan definidas a partir de otra; es decir, depende de otra para quedar definida. Esta variable es ubicada en el eje de las ordenadas en el plano cartesiano; eje *y*. Cuando se dice que el área de un círculo es función del radio, lo que se quiere decir es que el área depende del radio. A = f (R)

Constantes: Son términos que tienen valores fijos; es decir, tiene valores fijos, lo que indica que no cambia en ninguna circunstancia. Los valores numéricos son el ejemplo típico de constantes.

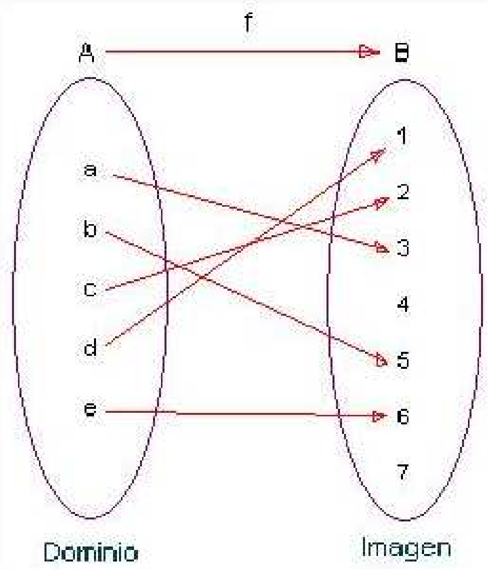
En la antigüedad se utilizaban las vocales para indicar las variables y las consonantes para indicar las constantes. En la actualidad por convención general, las primeras letras del alfabeto se utilizan para indicar las constantes y las últimas letras para indicar las variables.

Con estos elementos se puede hacer una definición de función.

DEFINICIÓN: Una función es *una relación* donde a cada elemento del conjunto de partida le corresponde *uno y solo* un elemento del conjunto de llegada.

En funciones al conjunto de partida se le llama Dominio y al conjunto de llegada se le llama imagen. En el plano cartesiano los elementos del dominio son ubicados en el eje *x* y los elementos de la imagen son ubicados en le eje *y*.

Por la definición, se puede inferir que todas las funciones son relaciones, pero NO todas las relaciones son funciones. (*Discutir esta conclusión con los compañeros del grupo colaborativo*)



Para determinar si una relación es función, basta con observar en el diagrama de Venn, que todos los elementos del dominio estén relacionados con algún elemento del rango, pero solo con uno.Gráficamente, que de todos los elementos del dominio salga solo una flecha.

Hay dos casos donde la relación no es función: Cuando un solo elemento del dominio no este relacionado con alguno del rango o si algún elemento del dominio esta relacionado con más de un elemento del rango.

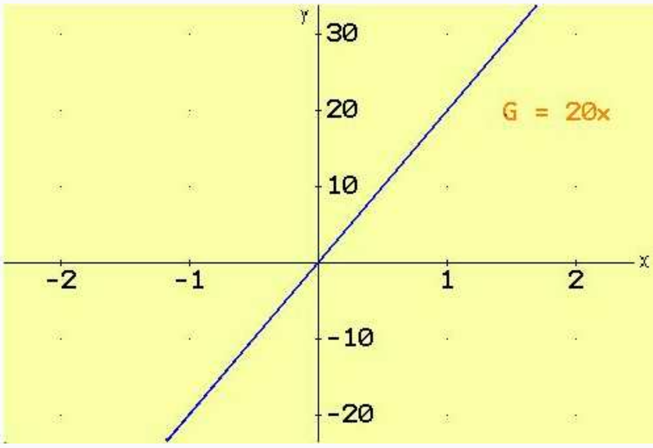
Existen 4 formas de definir una función, en el trabajo con funciones estas formas se trabajan indistintamente, lo que indica que se deben conocer y dominar adecuadamente.

1. DESCRIPTIVA: Es la descripción verbal del fenómeno que se estudia, en esta se detallan las condiciones en que ocurren los hechos. Por ejemplo: La ganancia G que resulta de vender x artículos, en la cual el valor unitario es de $200.

2. NUMÉRICA: Consiste en hacer una tabla de valores con los datos obtenidos del fenómeno al hacer las mediciones correspondientes.Por ejemplo:

x	0	1	2	3	4 . . .
G	0	20	40	60	80 . . .

3. GRÁFICA: Por medio de una representación gráfica, ubicando pares ordenados en el plano cartesiano, se puede observar la forma de la curva que muestra la función dada.



Los puntos ubicados en el plano son los descritos en la parte numérica.

En el eje x se representan los artículos vendidos y en el eje y la ganancia por ventas.

4. ANALÍTICA:También es llamada Matemática, es aquella que por medio de un modelo matemático se describe el fenómeno, para el ejemplo que estamos analizando seria:

$$\mathbf{G = 20\ x}$$

El modelo describe la ganancia (G) en función de número de artículos vendidos (x).

ELEMENTOS DE UNA FUNCIÓN:

En toda función se pueden encontrar 3 elementos.

Dominio: Son los elementos del conjunto de partida; es decir, los elementos de *x*, que corresponden a la variable independiente. En el ejemplo modelo la variable independiente son el número de artículos vendidos. Anteriormente se hizo aclaración que los elementos del dominio se ubican en el eje *x* del plano cartesiano.

Imagen: Son los elementos del conjunto de llegada; es decir, los elementos de *y*, que corresponden a la variable dependiente. En el ejemplo modelo es la ganancia G. También por convención los elementos de la imagen se ubican en el eje *y* del plano cartesiano.

Regla o Condición: Se considera a la forma en que se relacionan los elementos de *x* e *y*. Cada función tiene una regla que relaciona las dos variables. Solo se debe tener presente que a cada elemento de*x* le corresponde solo uno de *y*.

Dominio e Imagen de una función

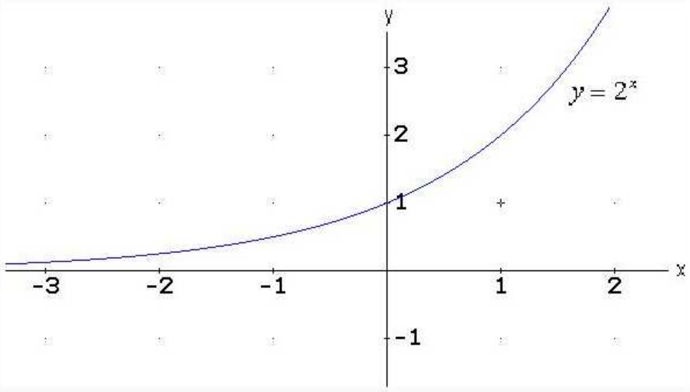
Determinación del Dominio e Imagen de una función:

En el análisis de funciones, es importante identificar el dominio e imagen de la función, lo cual se puede hacer de dos maneras.

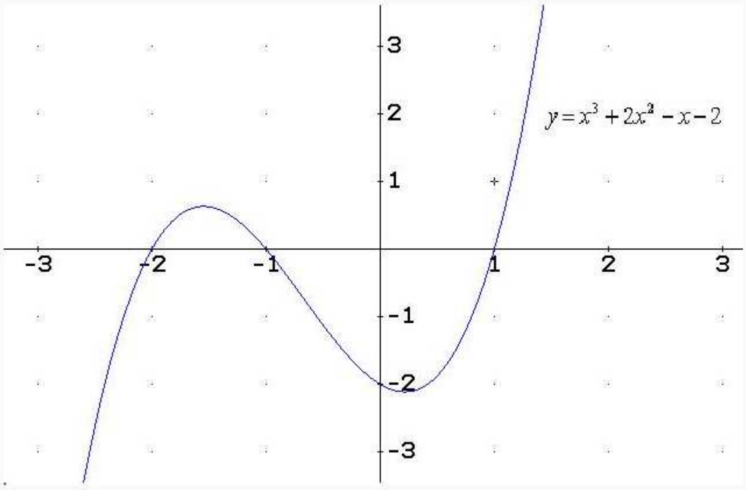
A Partir de la Gráfica:

Con la observación detallada de la gráfica, se puede identificar el dominio y la imagen de una función, veamos dos ejemplos modelos.

Gráfica A



Gráfica B



Gráfica A. Se observa que la curva se desplaza a lo largo del eje x, tomando valores positivos y negativos, luego el dominio son todos los valores reales. Para la imagen, la curva se desplaza en la parte positiva del eje y, luego la imagen son todos los reales positivos.

La notación será: $\mathbf{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$

Gráfica B: En la curva se observa que la grafica puede tomar valores positivos o negativos en el eje x, igual para el eje y, luego el dominio e imagen de la función son todos los reales.

La notación será: $\mathbf{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

A Partir del Modelo Matemático: (fórmula matemática)

Dada el modelo matemático, se puede determinar los valores que pueden tomar la variable independiente y la variable dependiente. Con algunos ejemplos modelos se puede comprender la situación.

Sea $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$ .Según el modelo se puede inferir que la variable x puede tomar valores positivos, negativos incluso cero, luego el dominio son todos los reales. Así se observa que la variable y tendrá valores positivos y negativos e incluso cero, luego la imagen son todos los reales; es decir es una función de reales en reales.

Sea y - 1/x .Se puede ver que la variable *x* puede tomar valores positivos y negativos, pero NO puede tomar el valor de cero, luego el dominio serán todos los reales diferentes de cero. La variable *y* será positiva si x es positiva y viceversa, pero nunca será cero, luego la imagen son todos los reales diferentes de cero.

Sea $y = \sqrt{x}$.La variable *x* puede tomar valores positivos y cero, pero No puede tomar valores negativos, ya que la raíz cuadrado de números negativos no es real, así el dominio serán los reales positivos y el cero (reales no negativos). Los valores que puede tomar*y* serán positivos y cero ó negativos, pero no los dos; para que se pueda consideran una función, luego la imagen son los reales no negativos ó los reales negativos.

En general el Dominio de una función serán los valores que pueda tomar la variable *x* sin que se presenten ambigüedades en el momento de hacer la operación matemática.

La imagen se determina despejando *x* del modelo matemático y se observa qué valores puede tomar la variable *y*.

NOTA: Con la práctica y muchos ejercicios se ganará destreza para determinar el dominio e imagen de una función.

Funciones Inyectivas,sobreyectivas y biyectivas

Como se sabe en las funciones hay una interacción entre los elementos del dominio y rango. De acuerdo al tipo de interacción existen tres clases de funciones.

Función Inyectiva: También llamada Función Uno a Uno, son aquellas donde los elementos del rango que son imagen de algún elemento del dominio, solo lo hacer una vez. Las funciones crecientes y decrecientes son inyectivas.

DEFINICIÓN:

Sea la función $y = f(x)$, dados dos elementos del dominio x_1 y x_2,

Si $x_1 \neq x_2$, y $f(x_1) \neq f(x_2)$, entonces la función es inyectiva

Función Sobreyectiva: Las funciones y = f(x), donde "Todos los elementos del rango" son al menos imagen de uno o varios elementos del dominio. Lo anterior quiere decir que todos los elementos del rango se relacionan con algún o algunos elementos del dominio.

Función Biyectiva: Una función y = f(x) es Biyectiva si, solo si, es inyectiva y Sobreyectiva.

Clasificación de funciones

Clasificar la gran cantidad y variedad de funciones no es tarea fácil, anteriormente analizamos que según el tipo de relación hay funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Pero existen otros criterios para clasificar funciones, el más general es clasificar las funciones según el tipo de expresión matemática que la describe. Por ejemplo la ecuación lineal describe funciones lineales, las ecuaciones cuadráticas describen funciones cuadráticas, los logaritmos describen las funciones logarítmicas y así sucesivamente.

El criterio descrito es muy pertinente, ya que de esta manera se puede involucrar la mayoría; por no decir todas las funciones que existen y puedan existir.

Bajo este contexto las funciones se clasifican en Algebraicas, Trascendentales y Especiales.

Funciones especiales

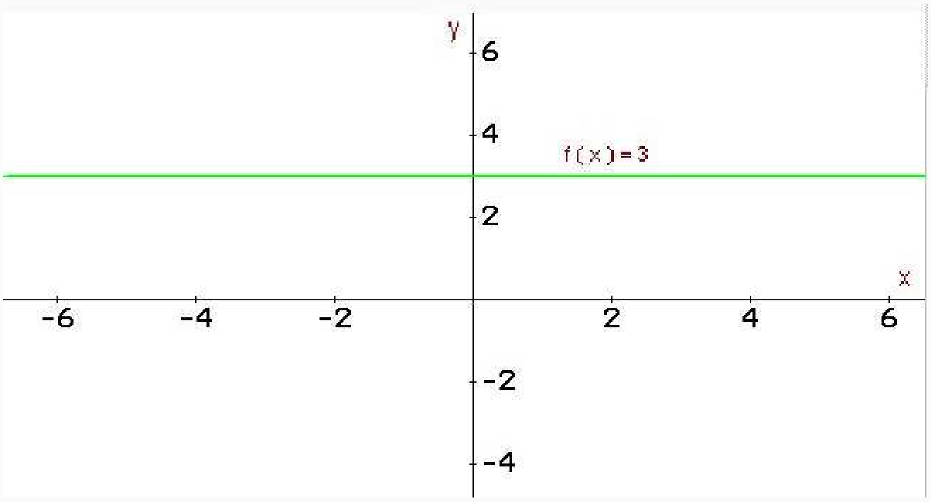
Se consideran a las funciones cuyo modelo matemático no tiene un patrón definido, más bien son muy particulares.

Función Constante:

Sea f(x) = b. Siendo *b* una constante. Esta función indica que para todo valor de *x*, su imagen siempre será *b*. La función constante es lineal.

La notación: f : R → R_{fijo}

Su dominio son todos los reales y su imagen un único valor b; quizás esto es lo que la hace ver especial.



Es una función par, ya que

f (- x) = f (x), luego es simétrica respecto al eje y.

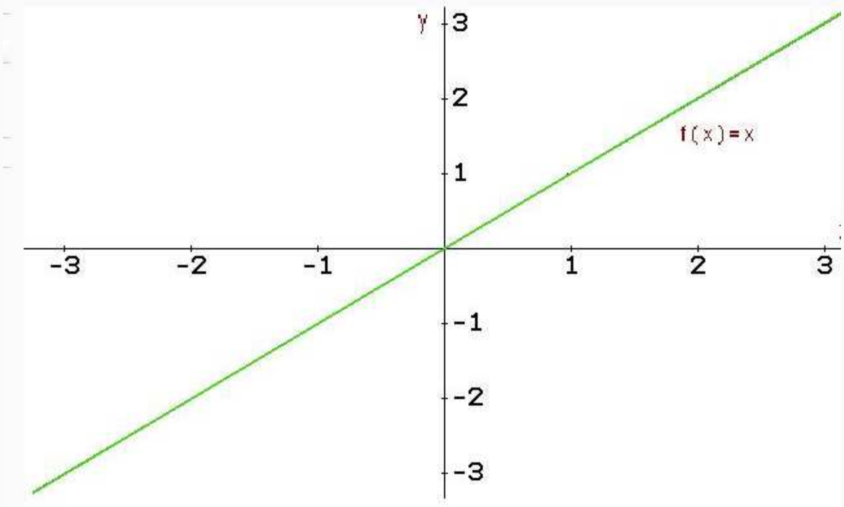
La función que se presenta en la gráfica muestra que el dominio es cualquier real y la imagen para este caso es y = 3.

Esta función no es creciente, tampoco decreciente, por lo cual no se considera monótona.

Se le llama idéntica ya que para cualquier valor del dominio, su imagen es precisamente el mismo valor.

Sea f(x) = x. Esta función también es lineal, solo que el valor del dominio e imagen es el mismo, aquí es donde se le da la connotación de especial. La notación f : R → R

Esta función es impar, ya que se cumple f (-x) = - f (x).



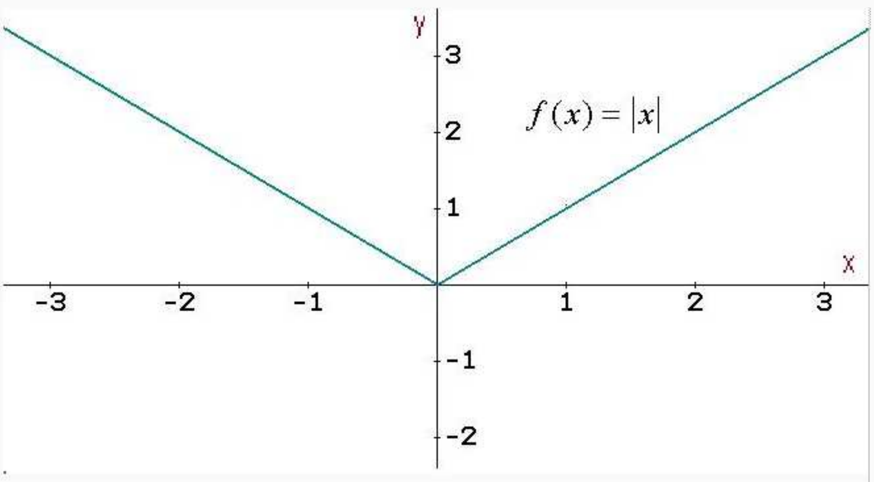
Por ser una función impar, la función idéntica es simétrica respecto al origen.

En la gráfica se observa que la función es creciente, esto porque el coeficiente de la variable *x* es positivo, pero si dicho coeficiente es negativo la función será decreciente, así esta función es monótona.

Función valor absoluto

Esta función cumple con los principios del valor absoluto.

Sea $f(x) = |x|$. El dominio son todos los reales, ya que el valor absoluto se aplica a cualquier valor real. La imagen son los reales no negativos, debido a que el valor absoluto por definición siempre será positivo o a lo más cero.La notación f : R → R^*



Es una función par ya que f (- x) = f (x), por lo cual es Simétrica respecto al eje *y*.

La función es creciente en el intervalo [0, ∞) y decreciente en el intervalo (-∞, 0).

Función parte entera

Es una función muy especial ya que presenta una discontinuidad notoria. Algunos la llaman función escalonada, en la gráfica se verá porque.

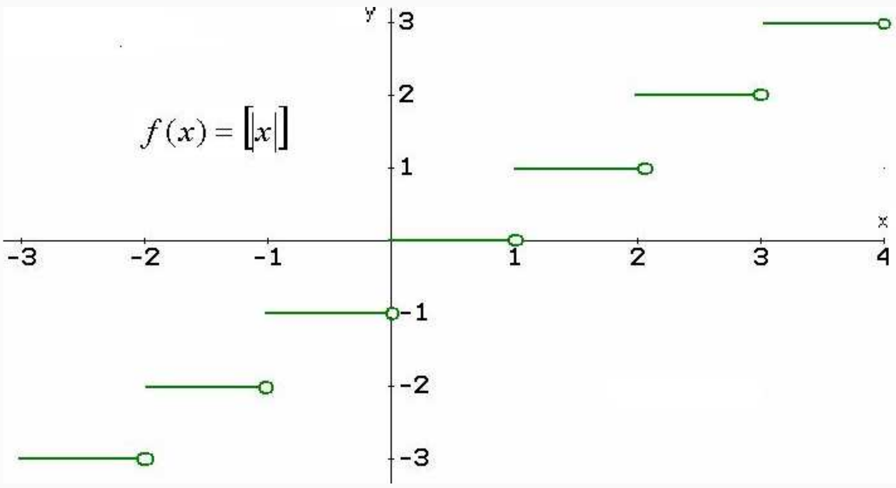
Sea $f(x) = [\![x]\!]$.Cuyo significado es el valor máximo entero menor o igual que *x*, más común parte entera. Por ejemplo $f(x) = [\![0{,}2]\!] = 0$, ya que 0,2 es mayor menor o igual que 0.

Más explícitamente:

Para -1 ≤ x < 0, su imagen es -1

Para 0 ≤ x < 1, su imagen será 0

Para 1 ≤ x < 2, su imagen es 1. Así sucesivamente.



El dominio de esta función son todos los reales y su imagen los enteros. f : R → Z

No tiene simetría, tampoco monotonía, su característica más notoria es su discontinuidad para cada x entero.

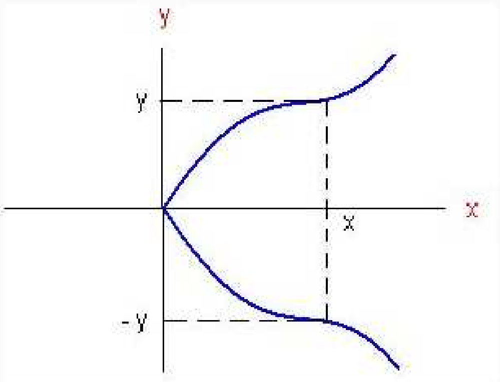
Función definida por partes

Es una función que combina parte de diversas funciones, puede ser definida por una parte constante y otra idéntica, una parte lineal y otra trascendental, etc. En general la función definida por partes se muestra por una regla compuesta por dos o más expresiones matemáticas. Aunque no hay una forma general, podemos ilustrar con algún ejemplo, pero se tendrá más oportunidad de analizar este tipo de funciones a lo largo del curso.

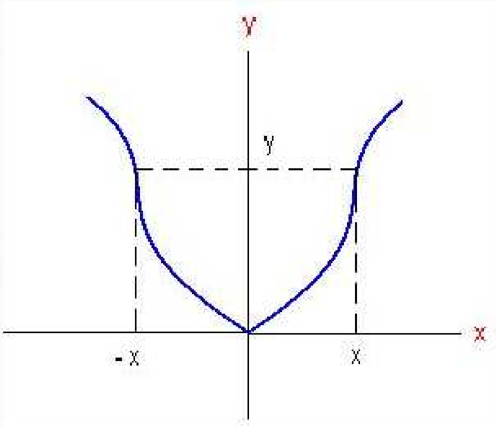
Gráficas de funciones

SIMETRÍA DE LAS FUNCIONES:

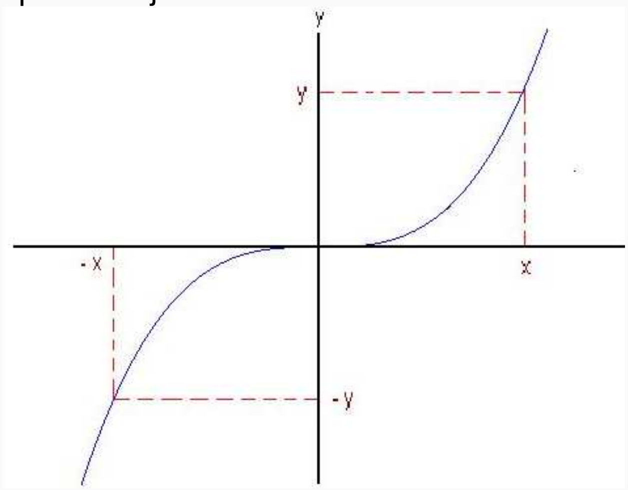
La simetría es el comportamiento de la curva respecto a los ejes coordenados. Una curva es simétrica respecto al eje *y*, si la parte derecha es la imagen especular de la parte izquierda, será simétrica respecto a *x* si la parte superior es la imagen especular de la parte inferior.



Simetría respecto a eje x



Simetría respecto al eje y



Simetría respecto al origen de coordenadas

La simetría de las funciones está relacionado con el concepto de función par e impar, veamos en qué consisten dichos principios.

Función Par: Una función f (x) es par si para todo x en su dominio: ***f (- x) = f (x)***. Este tipo de funciones son simétricas respecto al eje y. El ejemplo típico son las funciones cuadráticas.

Función Impar: Una función f (x) es impar si para todo x en su dominio:

f (- x) = - f (x). Este tipo de funciones son simétricas respecto al origen de coordenadas. El ejemplo típico son las funciones cúbicas.