Actividad 8: Lectura Capítulo 5

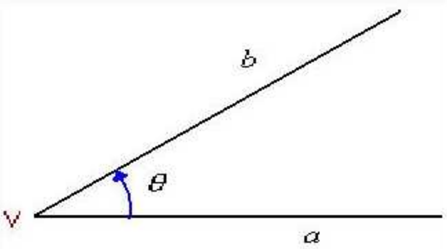
Fecha de inicio	Fecha de Cierre
10/OCT/13 00:00	02/NOV/13 23:55

Ángulos y el círculo trigonométrico

Ángulos

En Geometría se estudiaron los ángulos, clases, propiedades y demás. Se analizaron diversas definiciones de ángulos, aquí solo se dará una definición muy sencilla y particular.

Un ángulo se forma cuando dos segmentos de recta se cortan en un punto llamado Vértice. A los segmentos de recta se le conocen como lado inicial y lado Terminal.



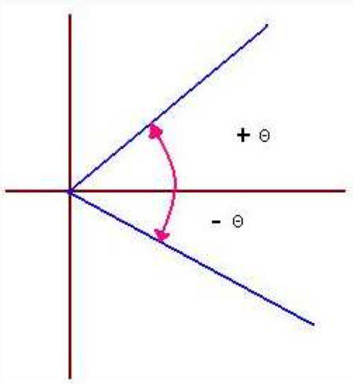
V = Vértice

a = lado inicial

b = Lado Terminal

Θ = Ángulo formado

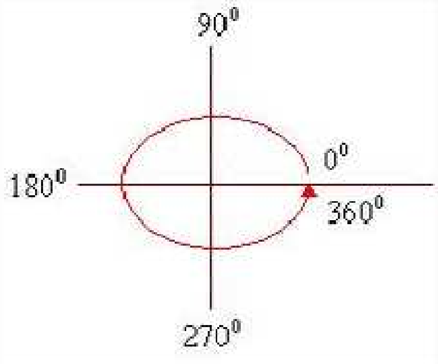
Se puede decir que un ángulo es el "Espacio formado" por los segmentos de recta que se cruzan en el vértice. Por convención un ángulo es positivo cuando se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj y negativo cuando se mide en sentido de dichas manecillas.

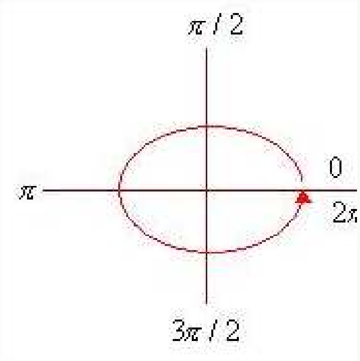


Por lo general para simbolizar los ángulos se usan letras griegas como α, β, δ, γ entre otras, o letras latinas mayúsculas A, B, C, otros.

La gráfica muestra que el ángulo es positivo hacia arriba y negativo hacia abajo.

Medida de loa ángulos: La medida de los ángulos depende de la abertura o separación que presenten las dos semirrectas. Existen dos sistemas básicos para medir los ángulos. *El SistemaSexagesimal* cuya unidad son los Grados y el *sistema Circular* cuya unidad es el Radian. Estos tienen referencias, veámoslo en la grafica siguiente





.

Sistema Sexagesimal   Sistema Circular

Una vuelta equivale a 360^0 en el sistema sexagesimal y 2π en el sistema circular.

Existe un sistema de conversión entre los sistemas, según las equivalencias que se pueden ver en las gráficas.

Para convertir de radianes a grados:

$$\boxed{x_{Radianes} = \frac{\pi}{180}(y_{Grados})}$$

Para convertir de grados a radianes.

$$\boxed{y_{Grados} = \frac{180}{\pi}(x_{Radianes})}$$

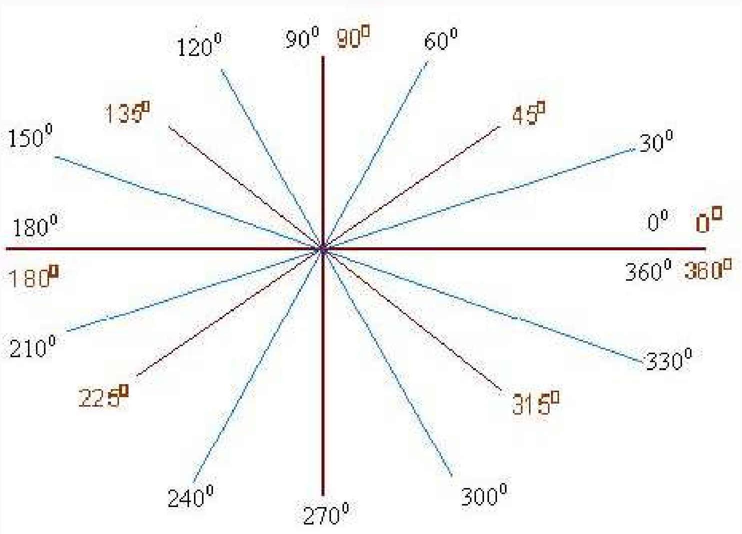
Ángulos notables

Ángulos existen muchos, pero para facilitar el análisis de los mismos, se han establecido unos ángulos que se les han denominado ángulos notables, ya que a partir de estos se puede analizar cualquier otro. En el sistema de coordenadas rectangulares, el primer cuadrante esta comprendido entre los ángulos 0 y π / 2. El segundo cuadrante esta comprendido entre π / 2 y π, el tercer cuadrante entre π y 3π / 2 y el cuarto cuadrante esta comprendido entre 3π /2 y 2π.

Los ángulos notables se obtienen cuando se divide la unidad en 6 partes, así se obtienen 6 ángulos ya que 180 / 6 = 30, entonces se obtiene 6 ángulos con una medida de 30^0 cada uno en la parte superior del plano, de la misma manera en la parte inferior.

Los ángulos son: 0^0, 30^0, 60^0, 90^0, 120^0, 150^0, 180^0, 210^0, 240^0, 270^0, 300^0, 330^0, 360^0.

Pero también se pueden dividir en cuatro partes: 180 / 4 = 45, entonces se obtiene 4 ángulos con una medida de 450 cada uno. Así los ángulos son: 0^0, 45^0, 90^0, 135^0, 180^0, 225^0, 270^0, 315^0, 360^0.

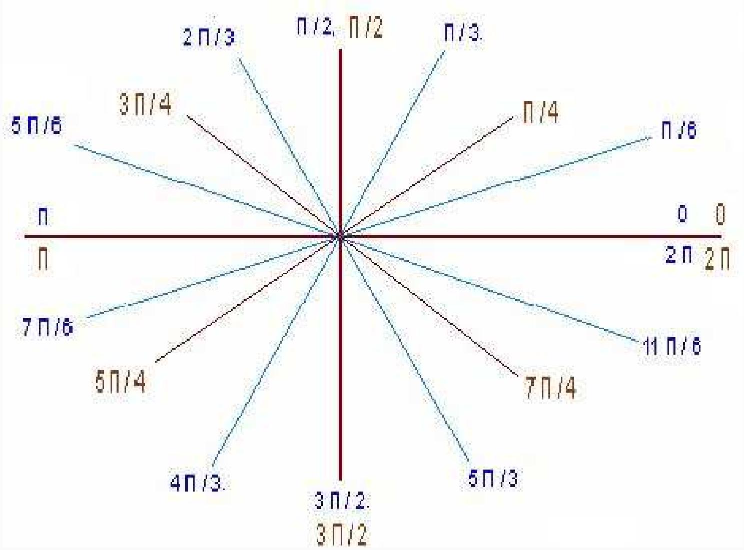


Las líneas azules muestras las 6 divisiones de la parte superior y 6 divisiones de la parte inferior. Las líneas cafés muestras las 4 divisiones de la parte superior y las 4 de la parte inferior. De esta manera se muestran los ángulos notables en grados.

Para el caso de radianes, la división es de la forma. Π / 6, así cada parte es 1/6 por la parte superior igual para la parte inferior del plano.

Los ángulos serán: 0, Π / 6, 2 Π / 6, 3 Π / 6, 4 Π / 6, 5 Π / 6, 6 Π / 6, 7 Π / 6, 8 Π / 6, 9 Π / 6, 10 Π / 6, 11 Π / 6, 12 Π / 6.

Haciendo 4 divisiones se obtienen las siguientes partes: 0, Π / 4, 2 Π / 4, 3 Π / 4, 4 Π / 4, 5 Π / 4, 6 Π / 4, 7 Π / 4, 8 Π / 4.



Las líneas azules muestran la división en 6 partes y la línea café muestra la división en 4 partes.

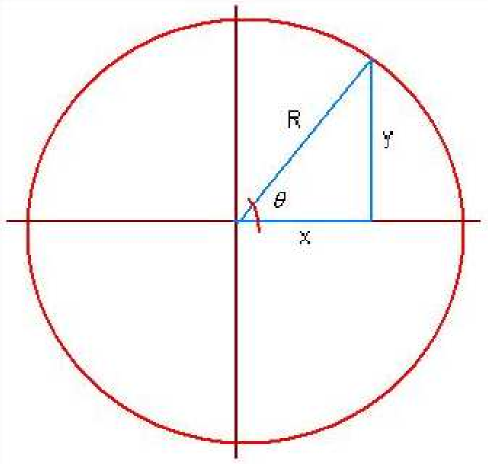
Resumiendo la construcción de los ángulos notables, en la siguiente tabla se presentan aquellos en los cuadrantes correspondientes.

Cuadrante / Sistema	***Sexagesimal***	***Circular***
Primer cuadrante	0^{0} 30^{0} 45^{0} 60^{0} 90^{0}	0 π/6 π/4 π/3 π/2
Segundo Cuadrante	120^{0} 135^{0} 150^{0} 180^{0}	2π/3 3π/4 5π/6 π
Tercer Cuadrante	210^{0} 225^{0} 240^{0} 270^{0}	7π/6 5π/4 4π/3 3π/2
Cuarto Cuadrante	300^{0} 315^{0} 330^{0} 360^{0}	5π/3 7π/4 11π/6 2π

Circulo trigonométrico

Por ser las funciones trigonométricas de tipo trascendental, la obtención de las parejas ordenadas para hacer la gráfica es muy particular. El camino es recurrir a la circunferencia unidad, la cual tiene como radio uno. Por otro lado, hay un teorema que permite identificar los valores de los lados en un triángulo rectángulo.

CIRCUNFERENCIA UNIDAD (R=1)



Por favor darle click al siguiente link:
http://bc.inter.edu/facultad/edavila/PRECALCULO%20%20ARCHIVOS/TRIGO%20%20web%20circulo.ppt

Identidades trigonométricas

$$sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

En trigonometría existen unas ecuaciones muy particulares a las cuales se le llama *identidades trigonométricas*, dichas ecuaciones tiene la particularidad que se satisfacen para cualquier ángulo. Dentro de este contexto se analizarán varias clases de identidades, las básicas, las de suma y diferencia, las de ángulo doble y las de ángulo mitad.

Identidades básicas

Dentro de las identidades básicas se presentan 6 categóricas, las cuales analizaremos a continuación:

1. **Identidad Fundamental:** Partiendo del teorema de Pitágoras, la relación de los lados del triángulo y el círculo trigonométrico, se puede obtener dicha identidad.

$$\boxed{sen^2(x) + \cos^2(x) = 1}$$

2. **Identidades de Cociente:** Estas se obtienen por la definición de las relaciones trigonométricas

a)

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

b)

$$\boxed{\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{sen\,(\alpha)}}$$

3. **Identidades Recíprocas:** Se les llama de esta manera debido a que a partir de la definición, al aplicar el recíproco, se obtiene nuevos cocientes.

$$\boxed{sen\,(\alpha) = \frac{1}{\csc(\alpha)}}$$

a) $\boxed{\csc(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)}}$ Recíprocamente

b)

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{1}{\sec(\alpha)}}$$

$\boxed{\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}}$ Recíprocamente

c)

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{1}{\cot(\alpha)}}$$

$\boxed{\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}}$ Recíprocamente

4. **Identidades Pitagóricas:** a partir de la identidad fundamental y las identidades de cociente, se obtienen otras identidades llamadas pitagóricas. Aunque varios autores llaman a la identidad fundamental también pitagórica.

a) $\tan^2(\alpha)+1=\sec^2(\alpha)$

b) $\cot^2(\alpha)+1=\csc^2(\alpha)$

5. **Identidades Pares - Impares:** Cuando se definió la simetría de las funciones trigonométricas, se hizo referencia a las funciones pares e impares, de este hecho se obtiene las funciones pares e impares.

Pares: cos (-α) = cos α   y sec (-α) = sec (α)

Impares: sen (-α) = - sen (α)   tan (-α) = - tan (α)

cot (-α) = - cot (α)   csc (-α) = - csc (α)

6. **Identidades de Cofunción:** Cuando a π/2 se le resta un ángulo cualquiera, se obtiene la cofunción respectiva.

a) $sen(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos(\alpha)$ $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=sen(\alpha)$

b) $\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot(\alpha)$ $\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan(\alpha)$

Ecuaciones trigonométricas

Anteriormente se decía que las identidades trigonométricas son igualdades que se cumple para cualquier ángulo. Existen ciertas identidades que se cumplen para ángulos específicos, a dichas identidades se les llama ecuaciones trigonométricas.

DEFINICIÓN:

Las ecuaciones trigonométricas, son identidades que satisfacen solo ciertos ángulos. La solución se expresa en medidas de ángulos, puede ser en grados o radianes.

La resolución de ecuaciones trigonométricas requiere de un buen manejo de las funciones trigonométricas inversas; además, de los principios de álgebra y trigonometría.

Para que la ecuación sea más fácil de desarrollar, es pertinente reducir toda la expresión a una sola función, generalmente seno o coseno, para que se pueda obtener el ángulo o los ángulos solución.

Es importante aclarar que si no se dice otra cosa, la solución para nuestro caso se dará solo para la circunferencia unidad: $0 \leq x \leq 2\pi$. Algunos autores acostumbrar a dar al solución general, recordemos que las funciones trigonométricas son periódicas, ay que se repiten cada *p* intervalo.

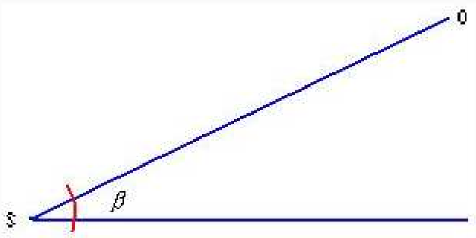
Resolución de problemas de triángulos rectángulos

La trigonometría sirve para solucionar problemas en muchas áreas del saber. La Astronomía, la Física, la Geografía y otras se sirven de la trigonometría para resolver sus problemas.

Las herramientas para trabajar problemas con trigonometría son conocer claramente el Teorema de Pitágoras, buenos principios de funciones trigonométricas, una calculadora científica para apresurar los cálculos; ojo NO para simplificarlos. Es pertinente que todos los cálculos se planteen metódicamente para comprender el problema y su solución sea la pertinente.

Ángulo de elevación

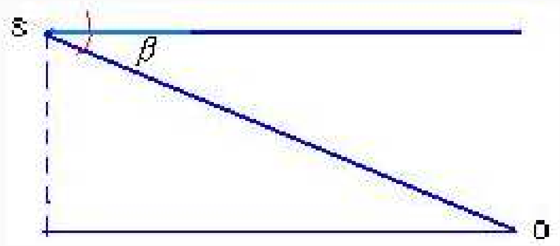
Cuando un observador ubicado en un punto dado, observa un objeto que esta a mayor altura que la visual de éste, el ángulo formado se le conoce como ángulo de elevación.



S = Observador
O = Objeto a observar
β = Angulo de elevación.

Ángulo de depresión

Es el formado por la visual y la horizontal, cuando el observador esta a mayor nivel que el objeto observado.



S = Observador
O = Objeto observado
β = Angulo de depresión

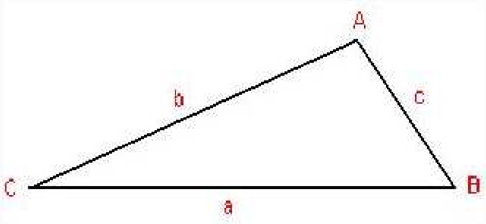
Resolución de problemas con triángulos no rectángulos

En los apartes anteriores se han analizado situaciones de los triángulos rectángulos, pero existen diversos fenómenos que no siguen este patrón, la base de un telescopio del observatorio internacional, las velas de un barco, las caras de las pirámides de Egipto, no tienen forma de triángulos rectángulos, sabemos que a este tipo de triángulo se les llama "Triángulos No Rectángulos".

EL trabajo que se desarrollará en este aparte es el análisis de triángulos no rectángulo. El soporte del estudio esta en los llamados teoremas de seno y coseno, los cuales permiten determinar los lados y ángulos de triángulos no rectángulos.

Teorema del seno

Para un triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos A; B, C. respectivamente, se cumple:



$$\boxed{\frac{sen(A)}{a} = \frac{sen(B)}{b} = \frac{sen(C)}{c}}$$

Teorema del coseno

Existen situaciones donde el teorema de seno no se puede aplicar de manera directa, en casos como tener dos lados y el ángulo entre ellos o tener los tres lados. Para estos casos y otros, la solución es el teorema del coseno.

Para un triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos A; B, C. respectivamente, se cumple:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= b^2 + a^2 - 2ab\cos C \end{aligned}}$$

Aplicación de las funciones trigonométricas

Una vez analizados los principios sobre triángulos no rectángulos, ahora podemos resolver problemas donde se requiera la utilización de estos principios.

En el siguiente texto se mencionaran algunas de ellas entre otras.

Por favor darle click al siguiente link:

http://www.matebrunca.com/Contenidos/Matematica/Trigonometria/movimarmonicomarvin.pdf