1 Superficies de revolución

Definición 1.1. Supongamos el espacio tridimensional $\mathbf{R}^3$ dotado del sistema de coordenadas (x,y,z). Una superficie de *revolución* en este espacio es una superficie generada al rotar una curva plana C alrededor de algún eje que está en el plano de la curva.

Un caso particular es cuando el eje de rotación es alguno de los ejes coordenados y la curva C está sobre alguno de los planos coordenados.

Ejemplo 1.1. Si el eje de rotación es el eje z y la curva plana C está sobre el plano xz con ecuación:

$$z = f(x) \tag{1}$$

tal que f es una función biyectiva definida solo para $x \geq 0$, entonces la ecuación de la superficie Σ de rotación tendrá ecuación:

$$\boxed{z = f(\sqrt{x^2+y^2})} \tag{2}$$

Para deducir la ecuación anterior, tomemos dos puntos A y B sobre la superficie Σ y un tercer punto M sobre el eje z. El punto A es un punto arbitrario de la superficie. Consideremos la circunferencia α que contiene al punto A, tiene centro en el punto M y está sobre el plano $z = z_1$. Esta circunferencia corta el plano xz en el punto B. Por lo tanto las coordenadas de los puntos son: $A(x,y,z_1)$, $B(x,0,z_1)$, $C(0,0,z_1)$. Pero el punto B pertenece a la generatriz C, por lo tanto sus coordenadas las podemos escribir como $B(f^{-1}(z_1),0,z_1)$. Ahora la distancia entre A y M es la misma que entre B y M pues son dos radios de la circunferencia.

$$\left.\begin{cases} A(x,y,z_1) \\ B(f^{-1}(z_1),0,z_1) \\ M(0,0,z_1) \end{cases}\right\} \Longrightarrow |AM| = |BM| \Longrightarrow$$

$$x^2+y^2 = [f^{-1}(z_1)]^2 \Longrightarrow z_1 = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \tag{3}$$

Pero A es arbitrario, por lo tanto $z_1 = z$. Observemos que en la deducción de la fórmula anterior las variables x, y e z se colocan cuando esto se puede en término de la variable fijada z_1, que es la que define el plano $z = z_1$ donde está la circunferencia α.

Ejemplo 1.2. Si el eje de rotación es el eje x y la curva plana C está sobre el plano xz con ecuación:

$$z = f(x) \tag{4}$$

tal que f es una función biyectiva definida solo para $x \geq 0$, entonces la ecuación de la superficie Σ de rotación tendrá ecuación:

$$\boxed{[f(x)]^2 = y^2+z^2} \tag{5}$$

Similarmente como en el ejemplo 1.1, tomamos el plano $x = x_1$, perpendicular al eje de rotación x, y tres puntos sobre este plano que pertenecen a la circunferencia α con centro en $M(x_1,0,0)$ y que contiene los puntos $A(x_1,y,z)$ y $B(x_1,0,z)$. Dado que B pertenece a la curva generatriz C, sus ordenadas son $B(x_1,0,f(x_1))$.

$$\left.\begin{cases} A(x_1,y,z) \\ B(x_1,0,f(x_1)) \\ M(x_1,0,0) \end{cases}\right\} \Longrightarrow |AM| = |BM| \Longrightarrow$$

$$y^2+z^2 = [f(x_1)]^2 \tag{6}$$

La hipótesis que A es arbitrario, completa la demostración.

El CATENOIDE es una superficie de revolución obtenida al rotar sobre el eje x la curva $z = \cosh x$, y la ecuación que la representa es: $y^2+z^2 = \cosh^2 x$. Una parametrización usada para graficarla con el software Maple es: $x = u$, $y = \cosh u \cos v$, $z = \cosh u \sin v$, con valores de los parámetros $-2 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Los ejes coordenados están colocados en forma estándar. (Ver: C.9.3).

El CATENOIDE, superficie de revolución obtenida al girar la curva catenaria $z = \cosh x$, sobre el plano xz, alrededor del eje x.

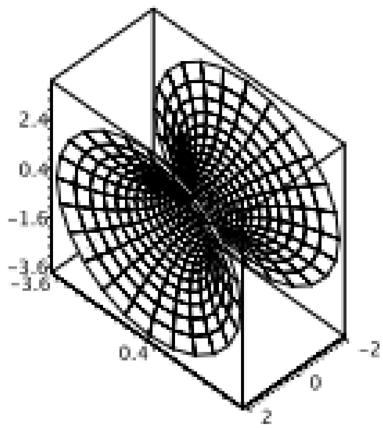

Figura 1 Catenoide

Ejemplo 1.3. Encuentre la ecuación de la superficie al rotar la recta $x = 3y$ alrededor del eje x.

SOLUCIÓN.

Debido a la rotación sobre el eje x las trazas sobre el plano xy (intersecciones de la superficie que debemos hallar con el plano xy ($z = 0$)), deben ser el par de rectas $y = \pm 3x$. Este par de ecuaciones se pueden escribir como una sola ecuación $y^2 = \left(\frac{1}{3}x\right)^2$. Lo cual es equivalente a decir

$$\text{Trazas sobre el plano} xy \Longrightarrow y^2 - \left(\frac{1}{3}x\right)^2 = 0 \tag{7}$$

Esto mismo debe ocurrir sobre el plano xz. Por lo tanto,

$$\text{Trazas sobre el plano} xz \Longrightarrow z^2 - \left(\frac{1}{3}x\right)^2 = 0 \tag{8}$$

Las trazas sobre los planos paralelos al plano yz, es decir intersecciones de la superficie con el plano $x = a = const.$, deben ser circunferencias con radio $y = f(a) = 3a$. Por lo tanto, la superficie es un cono cuya ecuación es:

$$y^2 + z^2 - \left(\frac{1}{3}x\right)^2 = 0 \Longrightarrow 9y^2 + 9z^2 = x^2 \tag{9}$$