

Aufgabe 3

Das Gebäude eines Museums kann modellhaft durch den abgebildeten Körper $ABCDEFGG$ dargestellt werden.

Die obere Etage des Museums entspricht dabei der Pyramide $DEFG$, die untere Etage dem Körper $ABCDEF$, der Teil der Pyramide $DEFG$ ist.

Die Ebene, in der das Dreieck ABC liegt, beschreibt die horizontale Oberfläche des Untergrunds. Das Dreieck DEF liegt parallel zu dieser Ebene.

In einem kartesischen Koordinatensystem gilt für die Lage einiger der genannten Punkte:

$A(-5 | 5 | 0)$, $B(5 | 25 | 0)$, $D(0 | 0 | 15)$,
 $E(0 | 30 | 15)$, $F(-25 | 5 | 15)$ und
 $G(-10 | 10 | 35)$.

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität.

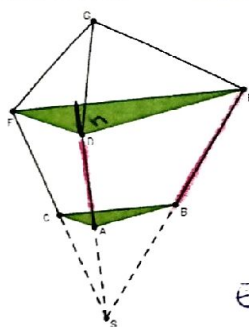


Abb. 1

a) Die folgenden Rechnungen zeigen ein mögliches Vorgehen zur Ermittlung der Koordinaten von S :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r - s = 3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ -30 \end{pmatrix}$$

d.h. $S(-15 | 15 | -30)$

Erläutere das dargestellte Vorgehen.

(5 BE)

b) (1) Weise nach, dass die Bodenfläche DEF der oberen Etage nicht rechtwinklig ist.

(4 BE)

(2) Bestimme für das Dreieck DEF die Größe des Innenwinkels ϵ bei E sowie die Länge der Höhe \hat{h} zur Seite EF .

[Zur Kontrolle: $\epsilon = 45^\circ$; $\hat{h} = 15\sqrt{2}$]

(6 BE)

(3) Begründe, dass der Abstand des Punktes G zur Ebene durch DEF direkt aus den Koordinaten der

entsprechenden Punkte ermittelt werden kann, und gib diesen Abstand an.

(2 BE)

(4) Für die obere Etage wird eine Anlage zur Enttauung der Luft installiert, die für 100 m^3 Rauminhalt eine elektrische Leistung von 0,8 Kilowatt benötigt. Weise nach, dass für den Betrieb der Anlage eine Leistung von 25 Kilowatt ausreichend ist.

(4 BE)

(1) Weise nach, dass die Gerade AG und die Ebene, in der das Dreieck DEF liegt, sich im Punkt $R(-\frac{30}{7} | \frac{50}{7} | 15)$ schneiden.

(4 BE)

(2) Bestimme eine Koordinatenform der Ebene U , in der das Dreieck EFG liegt.

[Zur Kontrolle: $U: 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -75$]

(3 BE)

An einer Metallstange, die durch die Strecke \overline{RG} dargestellt wird, ist im Punkt Q ein Scheinwerfer befestigt, dessen Größe vernachlässigt werden soll. Der Scheinwerfer beleuchtet aus einer Entfernung von 5 m diejenige Wand, die im Modell durch das Dreieck EFG dargestellt wird. Zeige, dass der Punkt Q mit den Koordinaten $Q(-\frac{95}{11} | \frac{85}{11} | \frac{280}{11})$ auf der Strecke RG liegt und einen Abstand von 5 m zur Ebene U hat.

(6 BE)

Der seitliche Eingang des Museums wird durch das Viereck $ABED$ modelliert. Der Architekt plant in diesem Bereich eine dreieckige Überdachung. Eine mögliche Überdachung wird durch das Dreieck DHE modelliert. Diese Überdachung ist in der Abbildung 2, allerdings von einer anderen Seitenansicht als in der Abbildung 1, dargestellt.

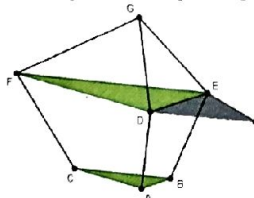


Abb. 2

d) Die Planung sieht vor, dass das Dreieck DEH in der gleichen Ebene wie das Dreieck DEF liegt. Des Weiteren sollen die Koordinaten des Punktes H so gewählt werden, dass das Dreieck DEH ein gleichschenkeliges Dreieck mit der Basis \overline{DE} ist.

Beurteile die Aussage, dass der Ortsvektor des Punktes H folgende Gleichung erfüllt:

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R}$$