UNIVERSIDAD NACIONAL
DE MAR DEL PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS
ECONOMICAS Y SOCIALES

El modelo de crecimiento de Solow

Mariano Morettini

Ayudante de Primera

Macroeconomía I

Abril de 2009

El modelo de crecimiento de Solow

Mariano Morettini

Ayudante de Primera – Macroeconomía I
Facultad de Ciencias Económicas y Sociales
Universidad Nacional de Mar del Plata
Abril de 2009

El modelo de crecimiento de Solow es netamente neoclásico. Fue publicado en 1956 por Robert Solow en el artículo "A contribution to the Theory of Economic Growth" en el Quarterly Journal of Economics, en febrero de 1956, páginas 65 a 94, y analiza la interacción entre el crecimiento del stock de capital, el crecimiento de la población y los avances de la tecnología, a la vez que estudia la influencia de aquellos sobre el nivel de producción, desde una perspectiva neoclásica.

En el modelo de Solow los planes de ahorro e inversión se cumplen en forma simultánea y los mercados se vacían siempre, resultando insignificante el desempleo keynesiano. La oferta de bienes depende del nivel de producción, que es función del stock de capital (K) y del trabajo (L), habiendo sustituibilidad entre ambos factores. Además, se supone que dicha función de producción cumple con las condiciones de Inada[1], por lo que teniendo rendimientos constantes a escala, la producción por trabajador sólo depende de la cantidad de capital por trabajador, lo cual puede expresarse de la siguiente manera:

$$Y/L = F(K/L) \quad o \quad y = f(k)$$[2]

La pendiente de esta función es el producto marginal del capital (PMgK) e indica el incremento en la producción por trabajador al adicionar una unidad de capital por trabajador, es decir:

$$PMgK = f(k+1) - f(k)$$

La forma de la función de producción, que puede observarse en la Figura a, da cuenta de la productividad marginal decreciente del capital, por cuanto la pendiente de la función es decreciente, lo cual se supondrá para el resto de los factores.

[1] Esto es: a) para todo nivel positivo de capital y de trabajo, los productos marginales de ambos factores serán positivos y decrecientes; b) la función de producción tiene rendimientos constantes a escala y c) el producto marginal de cada factor se aproxima a infinito a medida que tiende a cero el volumen de utilización del mismo y se aproxima a cero a medida que el volumen de utilización del mismo se acerca a infinito.

[2] Denotaremos con letras minúsculas las variables per cápita.

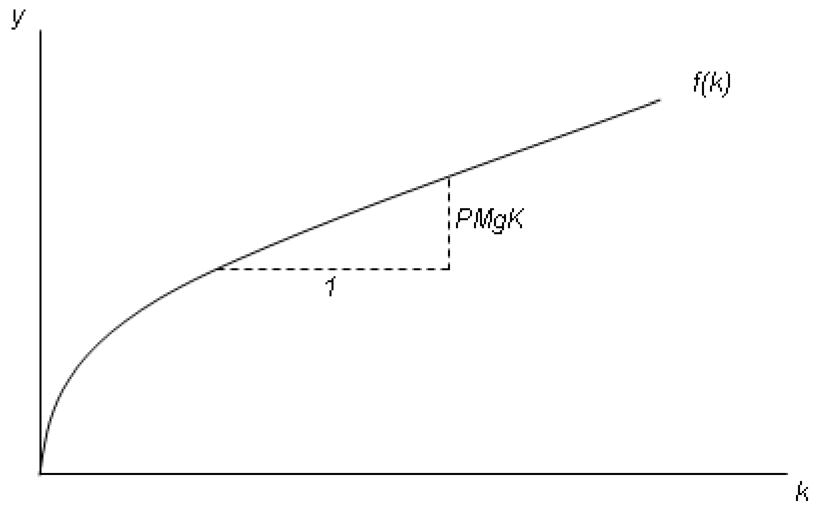

Figura a

Analizada la oferta de bienes y servicios, pasaremos ahora a ver el lado de la demanda. Solow supone una economía cerrada donde la demanda está dada por el consumo y la inversión, que en términos per cápita puede expresarse de la siguiente manera:

$$y = c + i$$

Esto es así porque bajo los supuestos del modelo de que no hay mercados ni empresas, la economía está integrada sólo por familias productoras, propietarias de los factores de producción, que deciden qué parte de la producción consumen y qué parte ahorran e invierten. Siendo que no hay otro bien en la economía, la parte del producto que no consumen, se transforma instantáneamente en capital.

Sabiendo que la inversión debe ser igual al ahorro en el equilibrio de una economía de las características descriptas, resulta que:

$$i = (1\text{-}PMgC\,)y = sy = s\,f(k)$$

Así, *s* no sólo es la tasa de ahorro, sino también la proporción de la producción que se dedica a la inversión.

Ahora bien, siendo que la producción depende básicamente del nivel de capital por trabajador, corresponde analizar las causas que influyen sobre el nivel de capital, es decir, la inversión y la depreciación. Por un lado, el stock de capital aumenta cuando las familias productoras invierten, mientras que por otro lado, el stock de capital disminuye por su propio desgaste, es decir, por la depreciación. Así, la variación del stock de capital por trabajador (Δk) depende de la inversión por trabajador (i) y de la depreciación del capital por trabajador (δk), es decir:

$$\Delta k = i - \delta k = s\, f(k) - \delta k$$

Donde δ representa la tasa de depreciación del stock de capital.

La ecuación anterior se denomina "ecuación fundamental" en el modelo, y será luego ampliada a medida que se incorporen más variables al análisis.

En la Figura b podemos observar la proporción de la producción que corresponde al consumo por trabajador y la proporción correspondiente a la inversión por trabajador, mientras que en la Figura c vemos las dos variables que influyen sobre el stock de capital, esto es, la inversión y la depreciación. Obviamente, ambas variables se incrementan a medida que lo hace el stock de capital, pero siendo que la inversión presenta un comportamiento creciente a tasa decreciente y la depreciación creciente linealmente, habrá un stock de capital que determine igual cantidad de incremento via inversión que de disminución via depreciación.

Para ese nivel de capital por trabajador (k*) nos encontraremos en el estado estacionario, que es aquella situación en la cual las variables relevantes crecen a una tasa constante. Es fácil advertir que para niveles de capital inferiores (como k_1), la pérdida de valor por depreciaciones será menor al incremento que producen las inversiones, con lo cual el stock de capital se incrementará. Por otra parte, para niveles de capital superiores al del estado estacionario (k_2) observamos una pérdida de valor superior al que la inversión puede añadir, lo cual hace disminuir el stock de capital. Sólo para el estado estacionario ambas magnitudes se compensan haciendo que ese stock de capital perdure en el tiempo.

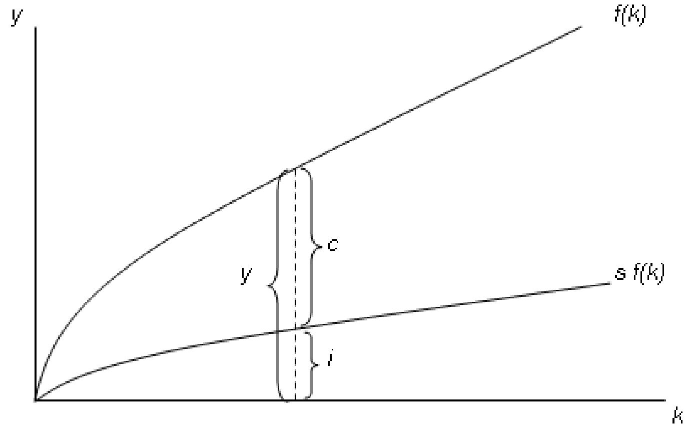

Figura b

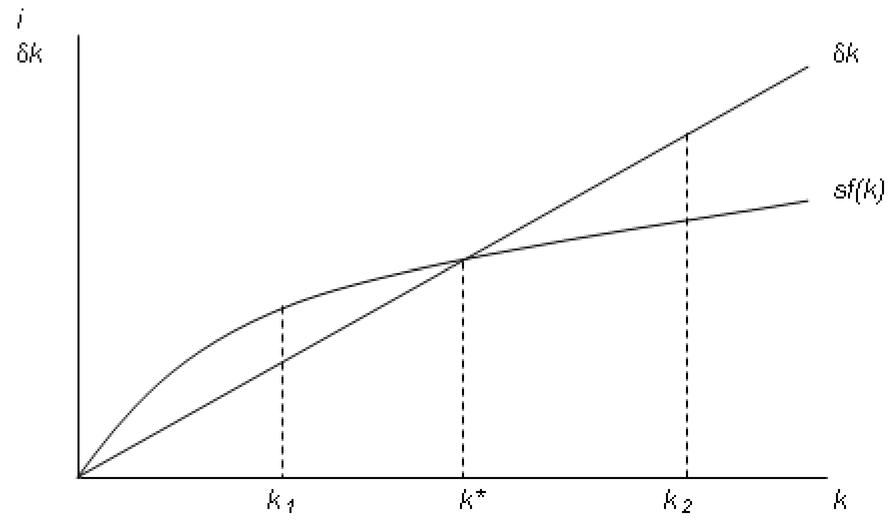

Figura c

Ahora bien, un cambio en la tasa de ahorro de una economía hará que cambien las fuerzas que incrementan el stock de capital, pero no influye en la tasa de depreciación del mismo. Así, y tal como puede observarse en la Figura d, el estado estacionario se modificará hacia un nivel de capital por trabajador mayor, si es que la tasa de ahorro de incrementa, o menor, en caso contrario. En definitiva, según el modelo de Solow, una alta tasa de ahorro implica un mayor nivel de capital y de producción. El nivel de crecimiento será mayor en el corto y mediano plazo, pero ésta no se mantendrá indefinidamente.

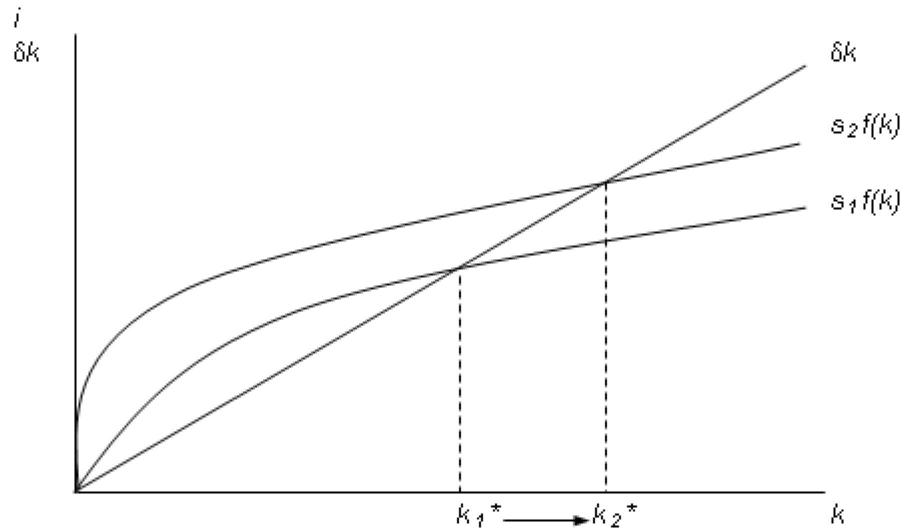

Figura d

Dado que para cada tasa de ahorro y para cada nivel de capital habrá un estado estacionario relacionado, resulta de interés determinar ese nivel de capital que genera aquel estado estacionario con mayor nivel de consumo per capita, el cual se lo conoce como la "regla de oro".

En el estado estacionario la única inversión es la de reposición, y el consumo es la diferencia, entonces, entre la producción y esa inversión, es decir:

$$c^* = f(k^*) - \delta k^*$$

Donde el signo * denota que se trata de los valores de cada variable en el estado estacionario.

Ahora bien, como nuestra incógnita es qué stock de capital genera el mayor nivel de consumo per capita, debemos considerar que a mayor capital, mayor será la producción, pero también mayor será la inversión por reposición. Así, la regla de oro se cumple cuando mayor es la diferencia entre la producción y la inversión, tal como se puede observar en la Figura e.

Para el nivel de capital k^*_{oro}, se define el estado estacionario con un nivel de consumo per capita de c^*_{oro}, que será el mayor nivel posible de consumo, dada la función de producción y la tasa de depreciación. La inversión per capita para ese estado estacionario será i^*_{oro}.

Por último, diremos que para la regla de oro se cumple la igualdad entre la productividad marginal del capital (PMgK), representada por la derivada de la función de producción $f(k)$, y la tasa de depreciación δ.

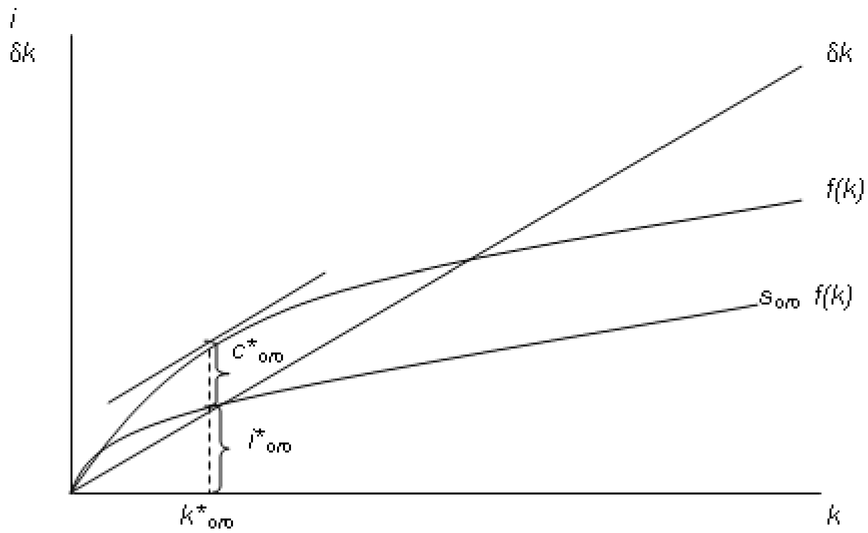

Figura e

Así, el capital per capita que es conveniente poseer es k^*_{oro}. Si el nivel de capital de una economía se encuentra por debajo de ese nivel, habrá que reducir el consumo para que, vía aumento del ahorro, se incremente la inversión y, así, el capital. Eventualmente se alcanzará el capital de la regla de oro y el consumo se estabilizará para un nivel mayor al original.

Si, por el contrario, el capital de una economía se encuentra por encima del correspondiente a la regla de oro, lo que convendría hacer sería incrementar el consumo para que la inversión se reduzca y la depreciación vaya desgastando el capital existente. Finalmente se alcanzará un consumo mayor al original, cuando se llegue al estado estacionario de la regla de oro.

Nótese que en ambos casos no se alcanza la regla de oro automáticamente, sino que hay que adecuar las tasas de consumo y, así, las de ahorro e inversión, para llegar al nivel óptimo de capital.

Así, y siguiendo a BAROSSI-FILHO, GONÇALVES SILVA and MARTINS DINIZ (2005), un país menos capital intensivo que otro tenderá a tener mayores tasas de rendimiento y, consecuentemente, mayor crecimiento del ingreso.

Contrastando las premisas expuestas hasta el momento del modelo con la evidencia empírica, puede decirse que, dado que el ahorro implica inversión y que ésta genera aumento de capital, lo cual produce crecimiento económico, es de esperar que al analizar las tasas de crecimiento económico de los países y sus respectivas proporciones de producto destinadas a la inversión se observe una relación directa. En la Figura f se muestra esa relación. En dicha figura se grafican las relaciones entre porcentaje del producto destinado a inversión y renta per capita correspondientes al año 2004 de 66 países[3].

Puede verse en el gráfico predicho que ante un mayor porcentaje de participación de la inversión en el producto de un país, mayor será la renta per capita resultante, tal como lo predice el modelo.

Por otra parte, el coeficiente de determinación de la regresión mínimocuadrática realizada es del 69%, lo cual implica que el 31% de las variaciones respecto de la media no resulta explicada por el modelo. En términos estadísticos esto representa un buen grado de

[3] Afganistán, Argentina, Australia, Austria, Bahamas, Bélgica, Belice, Botswana, Bulgaria, Burkina Faso, Canadá, Chile, Costa Rica, República Checa, Dinamarca, Ecuador, Eritrea, Estonia, Finlandia, Francia, Gabón, Georgia, Alemania, Grecia, Honduras, Hong Kong, Hungría, Islandia, Indonesia, Irlanda, Israel, Italia, Japón, Lituania, Madagascar, Malawi, Maldivia, Mali, Malta, México, Moldavia, Holanda, Nueva Zelanda, Nicaragua, Nigeria, Noruega, Pakistan, Filipinas, Polonia, Portugal, Rumania, Singapur, Eslovenia, Somalia, Sudáfrica, España, Suecia, Suiza, Taiwán, Togo, Túnez, Turquía, Reino Unido, Estados Unidos, Uruguay y Venezuela.

explicación del modelo, pero en términos económicos significa que aún restan investigaciones por realizar.

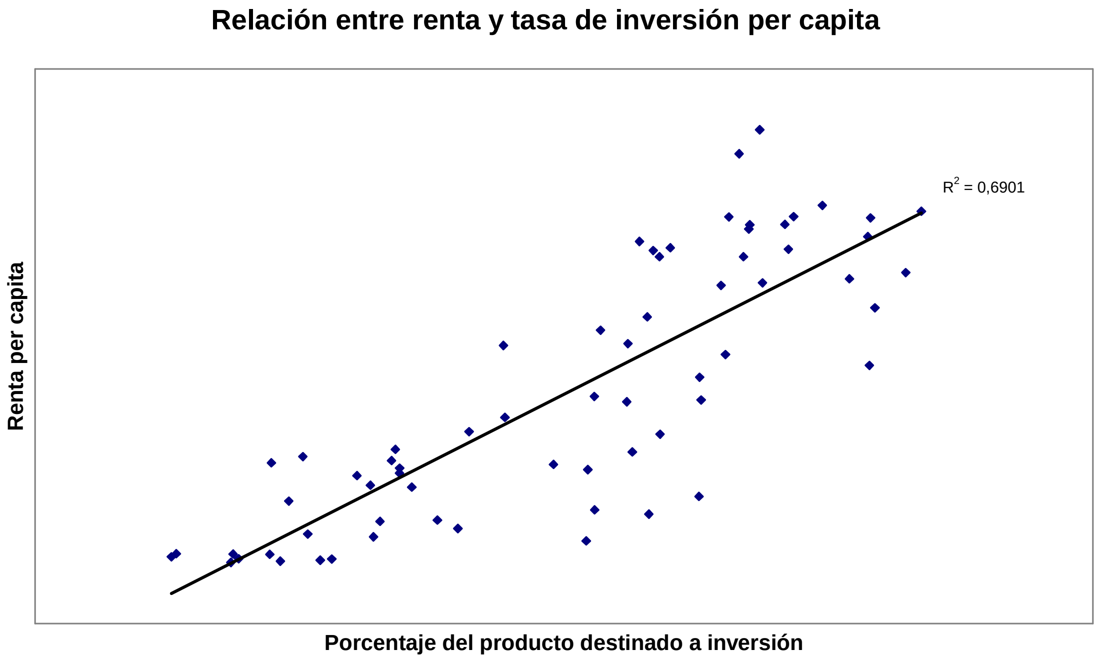

Figura f

Fuente: Alan Heston, Robert Summers and Bettina Aten, Penn World Table Version 6.2, Center for International Comparisons of Production, Income and Prices at the University of Pennsylvania, September 2006.

En efecto, el crecimiento económico continuo no depende exclusivamente de la acumulación de capital, sino que hay otros factores que contribuyen a explicar dicho crecimiento, como por ejemplo el crecimiento de la población y el progreso tecnológico.

Al incluir el crecimiento de la población en el modelo, debemos suponer que la misma se produce a una tasa constante que denominaremos v. Así, la variación del capital per capita se incrementará por la inversión, pero se reducirá no sólo por la depreciación, sino también por el propio crecimiento de la población, de manera que será:

$$\Delta k = i - (\delta + v)k = s\, f(k) - (\delta + v)k$$

El segundo término del segundo miembro será la inversión de mantenimiento, esto es, la inversión necesaria para que el capital por trabajador se mantenga constante. Así, dicha inversión de mantenimiento compensará el desgaste del capital y aportará el capital necesario para permanecer en el estado estacionario, aún cuando la población aumente. Así, permanece constante el capital por trabajador, pero como la cantidad de trabajadores se incrementa, también lo hará la producción total, cuestión que se verifica empíricamente. La forma de determinar el capital per capita de la regla de oro será, ahora, la igualación entre la productividad marginal del capital y la suma de las tasas de depreciación y crecimiento poblacional.

Otro aspecto también explicado por esta introducción al modelo es el hecho de que aquellos países con mayor crecimiento poblacional presentan menores valores de renta per capita. Esto puede graficarse como lo indica la Figura g.

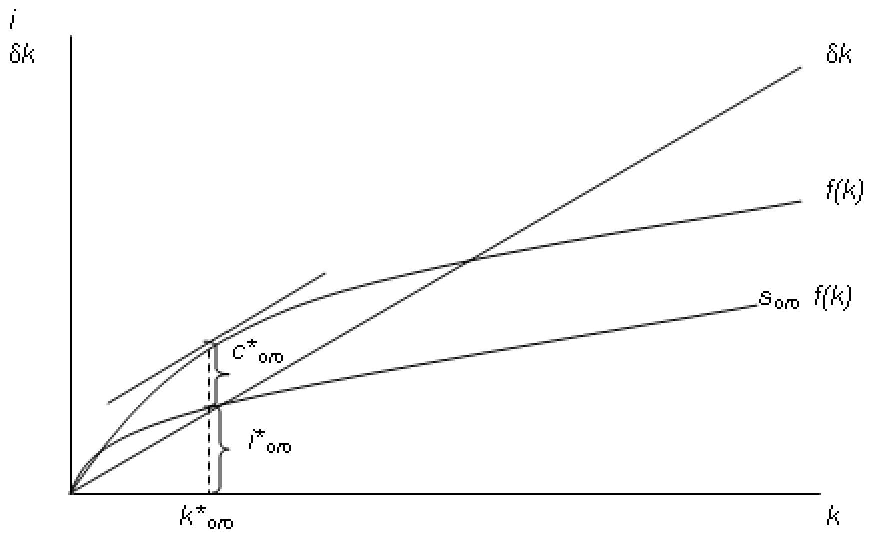

Figura g

Por otra parte, en la Figura h puede observarse la relación inversa entre el crecimiento poblacional y la renta per capita. Se tomaron los datos de 69 países[4] en cuanto a su PBI per capita en el año 2004 y el promedio anual de crecimiento poblacional desde 1950 hasta 2004, obteniéndose una clara relación inversa entre las variables, tal como lo predice el modelo de Solow.

Sin embargo, hay un tercer factor que explicaría el crecimiento económico, cual es el incremento de la eficiencia del factor trabajo, generado, básicamente, por el avance

4 Afganistán, Albania, Argentina, Australia, Austria, Barbados, Bélgica, Belice, Botswana, Burkina Faso, Canadá, Chile, China, Congo, Costa Rica, Cyprus, República Checa, Dinamarca, Ecuador, Eritrea, Estonia, Finlandia, Francia, Gabón, Alemania, Grecia, Guinea, Hondura, Hungría, Islandia, Indonesia, Irlanda, Italia, Japón, Corea, Lituania, Madagascar, Malawi, Maldivia, Mali, Malta, Mauricio, México, Holanda, Nueva Zelanda, Nicaragua, Níger, Nigeria, Noruega, Pakistan, Filipinas, Portugal, San Tomé, Seychelles, Slovenia, Somalia, Sudáfrica, España, Suiza, Suecia, Swaziland, Taiwán, Togo, Tunez, Turquía, Reino Unido, Estados Unidos, Uruguay y Venezuela.

tecnológico, que denotaremos con la letra "A". Supondremos que la eficiencia en el factor trabajo crece a una tasa constante y exógena γ.

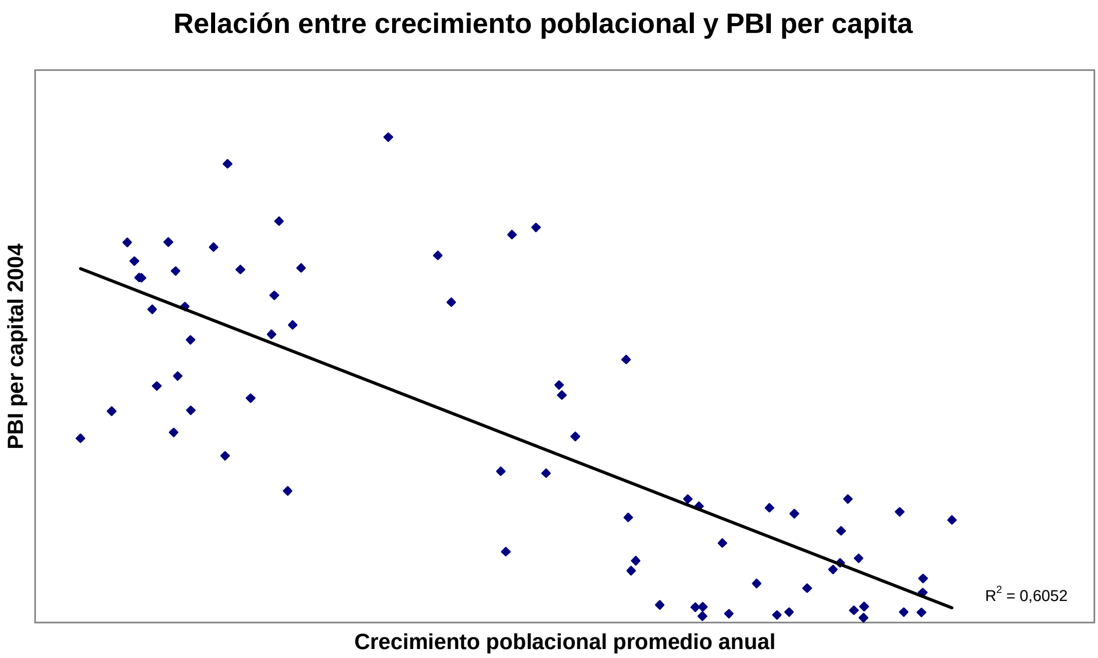

Figura h

Fuente: Alan Heston, Robert Summers and Bettina Aten, Penn World Table Version 6.2, Center for International Comparisons of Production, Income and Prices at the University of Pennsylvania, September 2006.

El estado estacionario, considerando el progreso tecnológico y el crecimiento poblacional podrá graficarse, entonces, de la siguiente manera:

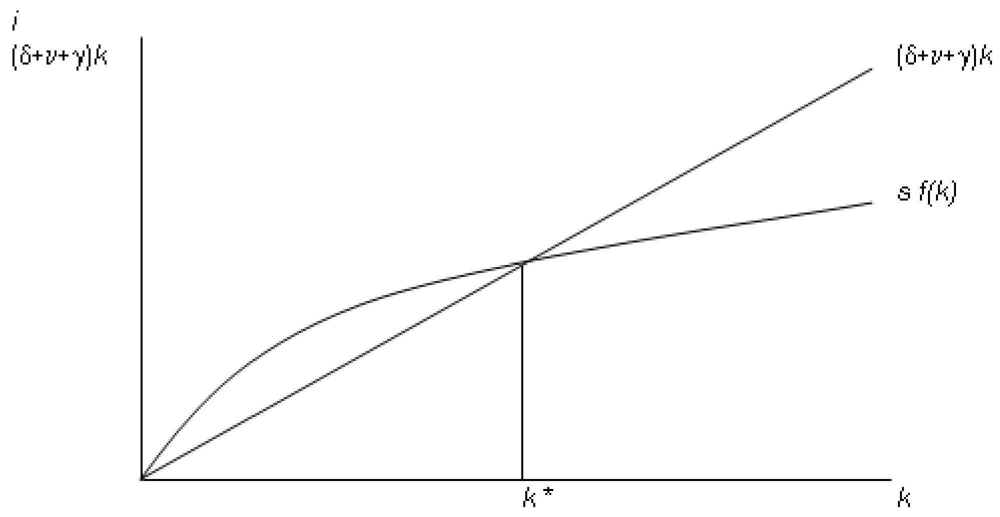

Figura i

La introducción del progreso tecnológico en el modelo de crecimiento de Solow permite explicar por qué se puede generar un crecimiento continuo en el nivel de ingreso per capita, ya que una elevada tasa de ahorro sólo justificaba un incremento de la producción hasta que se alcanzara el estado estacionario.

Cabe preguntarse, a esta altura del análisis, si los países pobres convergen al nivel de vida de los países ricos. Para que esto fuera así, los países pobres deberían crecer a una tasa superior que los países ricos. A este planteo se lo conoce como "hipótesis de convergencia", y entre las razones teóricas que pueden avalarla encontramos las siguientes:

a) El modelo soloviano predice que los países convergen hacia su estado estacionario, siendo las diferencias entre países en un momento dado explicadas por estar en distintos tramos del proceso en cuestión, pero que finalmente convergerán todos en un mismo nivel.

b) El rendimiento del capital es menor en los países donde mayor abundancia haya de dicho factor de producción, por lo que es esperable que fluya hacia países más pobres.

c) Problemas de difusión del conocimiento pueden hacer que los países pobres demoren en utilizar mejores y más nuevas tecnologías.

Ahora bien, si consideramos a dos países, uno de los cuales supondremos como pobre (P) y otro como rico (R), inicialmente poseedores de los capitales $k(0)_P$ y $k(0)_R$ respectivamente, y siendo que la tecnología es inferior en el país pobre, el estado estacionario al que converge este país será de un stock de capital per capita inferior al del rico, tal como puede observarse en la Figura j.

La convergencia no se da, entonces, en un sentido absoluto, entendiéndose por tal concepto a la idea de que los países relativamente pobres tienden a crecer a una tasa per capita más elevada que los países ricos, tal como lo expusimos anteriormente.

Si, en cambio, el análisis se hace respecto de la situación de un país en un momento dado respecto de su propio estado estacionario, estamos frente al concepto de convergencia condicional, donde la conclusión a la que se arriba es que un país crece más rápido cuanto más alejado esté de su propio estado estacionario.

En cuanto a la contrastación empírica acerca de la convergencia de las economías mundiales, BARRO and SALA-I-MARTIN (1991) han demostrado que parecería que cada país converge a su propio estado estacionario, independiente y distinto al de otras economías, y que eso depende de las tasas de ahorro, el crecimiento de la población y la educación de la población.

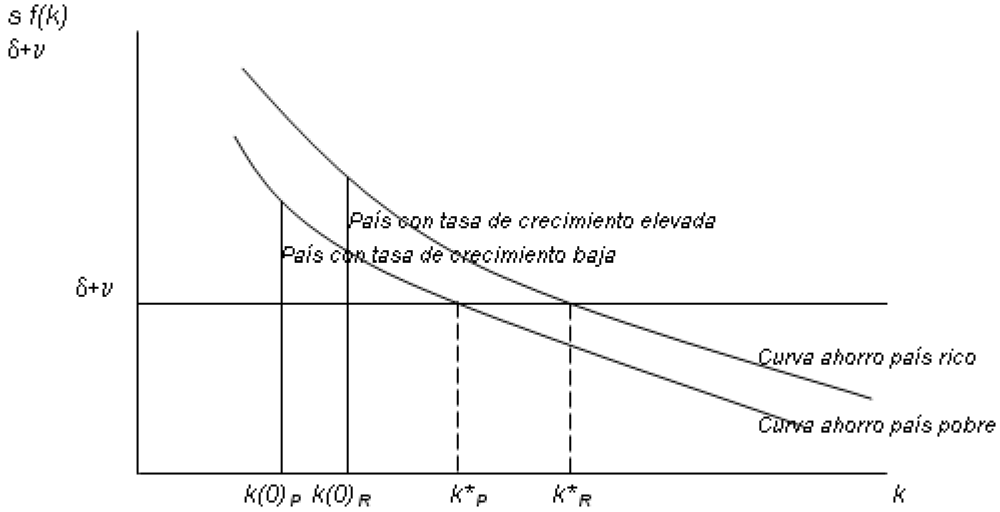

Figura j

Retomando con nuestro análisis, y siguiendo el razonamiento plasmado en la Figura i, podemos decir que de acuerdo a MANKIW, ROMER and WEIL (1990), el capital por unidad de trabajo eficiente correspondiente al estado estacionario, es decir, k^*, será igual a:

$$k^* = \left(\frac{s}{\nu + \gamma + \delta} \right)^{1/(1-\alpha)}$$

El modelo neoclásico de crecimiento de Solow, quedaría expresado, entonces, de la siguiente manera:

$$Y_t = K_t{}^{\alpha} (A_t L_t)^{1-\alpha}$$

Y siendo que la población crece a una tasa exógena ν y la tecnología a la tasa γ, será: $L_t = L_0 e^{\nu t}$ y $A_t = A_0 e^{\gamma t}$, con lo que, sustituyendo la expresión [4] en la función de producción Cobb-Douglas para variables en términos de unidades eficientes y luego tomando logaritmos naturales, quedaría:

$$\frac{Y_t}{A_t L_t} = \left(\frac{K_t}{A_t L_t} \right)^{\alpha} \left(\frac{A_t L_t}{A_t L_t} \right)^{1-\alpha}$$

$$\frac{Y_t}{Lt} = k^{*\alpha} A_t 1^{1-\alpha}$$

$$\ln\left(\frac{Y_t}{L_t}\right)=\ln\left(\frac{s}{\nu+\gamma+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}+\ln(A_t)$$

$$\ln\left(\frac{Y_t}{L_t}\right)=\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(s)-\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(\nu+\gamma+\delta)+\ln(A_0)+\gamma t$$

A partir de esta última expresión, pueden encontrarse las elasticidades del ingreso per capita respecto de la tasa de ahorro "s" y de la tasa de inversión de reposición "(ν+γ+δ)". Será de $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ en el primer caso y de $-\frac{\alpha}{1-\alpha}$ en el segundo.

Por otra parte, cabe mencionar que si bien γ y δ se espera que no varíen entre países, no sucede lo mismo con A_0, por cuanto depende de los recursos naturales, institucionales, climáticos, etc. de cada país, por lo que se espera que difiera, siendo entonces $\ln(A_0) = a + \varepsilon$, donde "a" es una constante y "ε" representa el shock específico de cada país, con lo que la expresión [5], para el momento 0, quedaría expresada de la siguiente manera:

$$\ln\left(\frac{Y_0}{L_0}\right)=\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(s)-\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(\nu+\gamma+\delta)+a+\varepsilon$$

Es indudable que el modelo neoclásico soloviano posee originalidad y representa un avance muy importante en el análisis del crecimiento económico, sin embargo, no está exento de críticas y limitaciones. Así, siguiendo a BAROSSI-FILHO, GONÇALVES SILVA and MARTINS DINIZ (2005), podemos mencionar dos que nos parecen de mayor relevancia.

En primer lugar, uno de los supuestos del modelo es que se trata de una economía cerrada, lo cual obviamente no suele suceder en la realidad. BARRO, MANKIW and SALA-I-MARTIN (1990) han intentado resolver esta cuestión proponiendo un modelo con economía abierta.

Y en segundo lugar, LUCAS (1988) demostró que se consiguen predicciones más compatibles con la realidad si se considera al capital no sólo al físico sino también al humano.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

ACKLEY, Gardner. (1965). *Teoría Macroeconómica*. 1º edición. México. UTEHA.

ARGANDOÑA RAMIZ, Antonio; Consuelo GAMEZ AMIAN y Francisco MOCHON MORCILLO. (1996). *Macroeconomía Avanzada II*. 1º edición. Madrid. Mc Graw Hill.

BAROSSI-FILHO, Milton, Ricardo GONÇALVES SILVA and Eliezer MARTINS DINIZ. (2005). "The empirics of the Solow Growth Model: long-term evidence". Journal of Applied Economics, Vol. VIII, No. 1. May 2005, 31-51.

BARRO, Robert J. and Xavier SALA-I-MARTIN. (1991). "Convergence across States and Regions". Brooking Papers on Economic Activity. No. 1, 107-182.

BARRO, Robert J., N. Gregory MANKIW and Xavier SALA-I-MARTIN. (1995). "Capital Mobility in Neoclassical Models of Growth". American Economic Review, Vol. 85, 103-115.

BLANCHARD, Olivier y Daniel PÉREZ ENRRI. (2000). *Macroeconomía*. 1º edición. Buenos Aires. Prentice Hall.

CONESA, Eduardo R. (2002). *Macroeconomía y Política Macroeconómica*. 1º edición. Buenos Aires. Macchi.

LUCAS, Robert E. (1988). "On the mecanics of Economic Development". Journal of Monetary Economics, Vol. 22, 3-42.

MANKIW, N. Gregory (1997). *Macroeconomía*. 3º edición. Barcelona. Antoni Bosch.

MANKIW, N. Gregory; David ROMER and David D. WEIL. (1990). "A contribution to the empirics of economic growth". National Bureau of Economic Research. Working Paper No. 3541. December 1990.

VAN LEEUWEN, Bas. (2007). Human Capital and Economic Growth in India, Indonesia and Japan. A quantitative analysis, 1890-2000. Utrecht. Disponible en http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2007-0614-201855/index.htm. Fecha de consulta: 10 de marzo de 2009.