МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского**

Введение в общие цепи Маркова

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
факультета ВМК для студентов ННГУ,
обучающихся по направлениям подготовки
010400 «Прикладная математика и информатика» и
010300 «Фундаментальная информатика
и информационные технологии»

Нижний Новгород
2013

УДК 519.245
ББК B17
B24

B24 Введение в общие цепи Маркова. Авторы: Зорин А.В., Зорин В.А., Пройдакова Е.В., Федоткин М.А.: Учебно-методическое пособие — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2013. — 51 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **О.А. Кузенков**

Настоящее пособие является введением в теорию цепей Маркова с общим измеримым пространством состояний. В нём разбираются те понятия теории общих цепей Маркова, которые имеют наглядные прообразы в теории классических счётных цепей Маркова: неприводимость, минорантные множества, цикличность, возвратность и невозвратность, стационарность. Отобранный материал применяется к одной содержательной задаче об обслуживания конфликтных транспортных потоков с последействием в классе циклических алгоритмов.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям «Прикладная математика и информатика» и «Фундаментальная информатика и информационные технологии», и может быть использовано при чтении специальных курсов «Теория случайных процессов», «Дополнительные главы теории вероятностей», «Теория управляемых систем массового обслуживания», «Теория меры».

Ответственный за выпуск:
заместитель председателя методической комиссии
факультета ВМК ННГУ,
к.т.н., доцент **В.М. Сморкалова**

УДК 519.245
ББК B17

Оглавление

Предисловие

Марковские процессы находят широкое применение в различных областях. Поэтому изучение некоторых разделов теории марковских процессов уже включено в общие и специальные курсы теории вероятностей. К ним относятся раздел по теории марковских процессов с дискретным временем (цепи Маркова) и дискретным пространством состояний, элементы теории процессов с непрерывным временем. При этом, как правило, марковский процесс с непрерывным временем развивается либо в счётном фазовом пространстве, либо в некотором евклидовом пространстве конечной размерности, так что конечномерные сечения процесса являются непрерывными случайными векторами.

Настоящее пособие является введением в теорию цепей Маркова с общим измеримым пространством состояний. Изучение данного пособия будет доступно, в основном, студентам старших курсов и студентам магистратуры из-за необходимости более глубокого знакомства с математическими основаниями теории вероятностей и теорией меры. В то же время, именно цепи Маркова с произвольным измеримым пространством состояний важны в современных исследованиях систем массового обслуживания, теории надёжности, теории и применениях методов Монте-Карло для высокопроизводительных вычислений.

В настоящем учебном пособии разбираются те понятия теории общих цепей Маркова, которые имеют наглядные прообразы в теории классических счётных цепей Маркова: неприводимость, цикличность, возвратность и невозвратность, стационарность. Минорантные множества рассматриваются как аналоги дискретных состояний. За рамками учебного пособия остались такие разделы, как построение расщеплённой цепи с помощью минорантных множеств, теория потенциала для цепей Маркова, эргодичность, предельные теоремы для функционалов. В связи с этим утверждения о существования инвариантных распределений даны без доказательств. Однако и отобранного материала оказывается достаточно, чтобы рассмотреть в минимально замкнутой форме одну содержательную задачу из теории массового обслуживания.

При написании разделов 1, 2 использовались монографии из списка литературы. Каждый подраздел оснащён необходимыми библиографическими указаниями. Материалы раздела 3 принадлежат авторам учебно-методического пособия.

Глава 1. Классические цепи Маркова

1.1. Цепи Маркова как математические модели

Многие классические законы физики обладают отсутствием последействия. Это означает следующее: при «правильно выбранном» описании $x(t)$ состояния изучаемого объекта в произвольный момент времени $t \in T$, если точно известно состояние изучаемого объекта в момент $t \in T$, то этим состоянием определяется эволюция объекта в будущем, то есть совокупность состояний $x(t')$, $t' > t$. Для реальных случайных процессов величины $x(t)$, $t \in T$ оказываются случайными, а основной их характеристикой является закон распределения вероятностей. *Цепи Маркова* характеризуются таким видом стохастической зависимости между состояниями изучаемой системы в различные моменты времени $t \in T$, при котором только состояние системы в момент t определяет закон распределения для будущих состояний объекта, независимо от состояний объекта до момента t.

Большое число реальных процессов управления характеризуются дискретностью моментов выработки управляющих воздействий. В этом случае множество T является дискретным. Говорят также о цепях Маркова с дискретным временем. Формальное математическое определение цепи Маркова будет дано ниже (1.2, 2.1). Приведем некоторые примеры возникновения цепей Маркова с дискретным временем.

Пример (a): ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона. Пусть наблюдается популяция однотипных живых организмов в последовательные моменты времени $t = 0, 1, \dots$. Предположим, что за единицу времени один организм производит случайное число потомков, причём число потомков X равно n с вероятностью p_n, $n = 0, 1, \dots$, $p_0 + p_1 + \ldots = 1$. Под состоянием системы в момент t будем понимать число X_t особей. Тогда n особей в момент времени t превращаются в $X^{(1)} + X^{(2)} + \ldots + X^{(n)}$ особей в момент $t+1$, где $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ — независимые случайные величины, распределённые одинаково с X. Стохастическая последовательность $\{X_0, X_1, \ldots\}$ образует цепь Маркова.

Пример (b): управление запасами. Рассмотрим деятельность склада в следующей ситуации. Максимально допустимое число единиц товара есть S. Заказы на пополнение склада осуществляются в моменты $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$. Спрос на товар на промежутке $(\tau_{t-1}, \tau_t]$ обозначим D_t, $t = 1, 2, \ldots$. Величины $D_1, D_2, \ldots$ предполагаются независимыми, одинаково распределёнными, неотрицательными, целочисленными. Если число единиц товара на складе опускается ниже уровня s, то осуществляется заказ до восполнения уровня S. Состояние системы X_t есть число единиц товара на складе в момент τ_t. Тогда динамика изменения величины запаса имеет вид

$$X_{t+1} = \begin{cases} X_t - D_{t+1}, & \text{если } X_t > s, \\ S - D_{t+1}, & \text{если } X_t \leqslant s. \end{cases}$$

Порождённая данным рекуррентным соотношением стохастическая последовательность $\{X_0, X_1, \ldots\}$ образует цепь Маркова.

Пример (c): обслуживание однородных требований в однолинейной системе с ожиданием. Пусть в систему массового обслуживания поступает простейший входной поток требований с интенсивностью $\lambda > 0$. Если в момент поступления требования прибор свободен, то немедленно начинается обслуживание. Если прибор оказывается занят, то поступившее требование становится в очередь ожидания. Длительности обслуживаний различных требований независимы, одинаково распределены с функцией распределения $B(x)$, $B(+0) = 0$. Будем наблюдать систему в моменты окончания обслуживания требований. Под состоянием системы X_t в момент $t = 1, 2, \ldots$ будем понимать число требований в системе после ухода t-го обслуженного требования. Положим также $X_0 = 0$, то есть в начале очередь пуста. Тогда имеет место соотношение

$$X_{t+1} = \max\{0, X_t + N_{t+1} - 1\}, \quad t = 0, 1, \ldots,$$

где случайные величины $N_1, N_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены, причём

$$\mathbf{P}\{N_t = k\} = \int_0^\infty (\lambda u)^k (k!)^{-1} \exp\{-\lambda u\}\, dB(u), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Число N_t есть количество новых требований, поступивших за t-ый такт обслуживания. Стохастическая последовательность $\{X_0, X_1, \ldots\}$ образует цепь Маркова.

Пример (d): многолинейная система обслуживания с ожиданием. Предположим, что рекуррентный поток однородных требований обслуживается m однотипными приборами. Интервалы между поступлением требований независимы и одинаково распределены с функцией распределения $A(u)$, $A(+0) = 0$. Если поступившее требование застаёт хотя бы один свободный прибор, то немедленно поступает на обслуживание. Если все приборы в момент поступления требования заняты, то требование становится в очередь ожидания. Длительности обслуживания требований независимы и одинаково распределены с функцией распределения $B(u)$, $B(+0) = 0$. Обозначим U_1, U_2, $\ldots$ интервалы между последовательными поступлениями требований, V_1, V_2, $\ldots$ длительности обслуживания требований. Введем в рассмотрение вектор $W_n = (W_{1,n}, W_{2,n}, \ldots, W_{m,n})$, где величина $W_{j,n}$ обозначает длительность промежутка времени между поступлением n-го требования и моментом времени, когда впервые не меньше j приборов станут свободными от требований. Очевидно, $0 \leqslant W_{1,n} \leqslant W_{2,n} \leqslant \ldots \leqslant W_{m,n}$, а $W_{1,n}$ — время ожидания начала обслуживания n-м поступившим требованием. Пусть $W_0 = (0, 0, \ldots, 0)$. Тогда имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$W_{n+1} = \mathbf{R}((W_{1,n} + U_{n+1} - V_{n+1})^+, (W_{2,n} - V_{n+1})^+, \ldots, (W_{m,n} - V_{n+1})^+),$$

где $(a)^+$ принимает значение a при $a > 0$ и значение 0 при $a \leqslant 0$, а оператор $\mathbf{R}$ упорядочивает элементы своего векторного аргумента по возрастанию. Тогда векторная стохастическая последовательность $\{W_0, W_1, \ldots\}$ образует цепь Маркова.

Пример (e): потери энергии при столкновениях. Важные задачи физики связаны с процессами обмена массой или энергией между движущимися частицами при столкновениях. Предполагается, в частности, что если до столкновения энергия (или масса) частицы была $x > 0$, то после столкновения она представляется случайной величиной Y, так что отношение Y/x имеет функцию распределения $G(u)$, не зависящую от x. Такие предположения соответствуют потерям энергии. Обозначим X_t энергию частицы после t столкновений. Тогда последовательность $\{X_0, X_1, \ldots\}$ есть цепь Маркова.

Пример (f): моделирование случайных векторов. При приближённом вычислении кратных определенных интегралов

$$J = \int\limits_D \cdots \int f(x_1, \ldots, x_m) p(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \cdots dx_m,$$

где D — область m-мерного пространства R^m, $p(x_1, \ldots, x_m)$ — плотность распределения в D, возникает вопрос о получении значения случайной точки $X = (X^1, \ldots, X^m)$ в области D с заданной плотностью распределения $p(x_1, \ldots, x_m)$. Метод марковских цепей заключается в моделировании траектории общей цепи Маркова $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$, $X_n = (X_n^1, \ldots, X_n^m) \in R^m$ — плотность стационарного распределения которой совпадет с данной плотностью $p(x_1, \ldots, x_m)$. При подходящем правиле генерирования последовательности $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ суммы

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f(X_i^1, \ldots, X_i^m)$$

будут сходится к $\mathbf{M} f(X^1, \ldots, X^m) = J$.

Пример (g): вложенные цепи для кусочно-линейных марковских процессов. Во многих приложениях теории массового обслуживания, теории надёжности применяется класс случайных процессов с непрерывным временем следующего устройства. Состояние процесса в момент t описывается вектором $\zeta(t) = (\nu(t), \xi(t))$, первая компонента которого может принимать лишь счётное число значений (конечное либо бесконечное), а вторая компонента есть вектор $(\xi_1(t), \ldots, \xi_j(t))$ с неотрицательными компонентами и размерности $j = j(\nu(t))$, зависящей от значения первой компоненты. С ростом времени t компоненты вектора $\xi(t)$ убывают, компонента $\xi_i(t)$ убывает со скоростью α_i, $1 \leqslant i \leqslant j$. В момент t, когда одна из величин $\xi_1(t)$, $\ldots$, $\xi_j(t)$ достигает нулевого значения, процесс $\zeta(t)$ совершает скачок. Из состояния $\nu(t-0) = k$, $\xi(t-0) = x$ совершается мгновенный переход в новое состояние $\nu(t+0) = k'$, $\xi(t+0) = x'$, где вектор x' имеет уже размерность $j' = j'(k')$. Новое состояние (k', x') выбирается случайным образом из некоторого распределения вероятностей $P_{k,x}(k', dx')$. Предполагается, что процесс $\{\zeta(t); t \geqslant 0\}$ является марковским. Рассмотрим для пояснения систему обслуживания из примера (d). Выберем в качестве дискретной компоненты число находящихся в системе требований. Пусть компонента $\xi_1(t)$ означает оставшееся время до поступления следующего требования, а компоненты $\xi_2(t)$, $\ldots$, $\xi_j(t)$ — оставшееся время до окончания обслуживания первым, вторым, и т.д., $(j-1)$-м приборами. Очевидно, здесь $j = \min\{m, \nu(t)\}$, а скорости убывания α_i непрерывных компонент равны единице.

Обозначим через t_n, $n = 1, 2, \ldots$ момент n-го скачка процесса $\{\zeta(t); t \geqslant 0\}$. Введём случайные величины $\zeta_n^- = \zeta(t_n - 0) = (\nu_n^-, \xi_n^-)$,

$\zeta_n^+ = \zeta(t_n+0) = (\nu_n^+, \xi_n^+)$. Тогда каждая из последовательностей $\{\zeta_n^-; n = 1, 2, \ldots\}$, $\{\zeta_n^+; n = 1, 2, \ldots\}$ оказывается однородной цепью Маркова. Её переходная вероятность выражается через распределения $P_{k,x}(\cdot,\cdot)$. Важность изучения вложенных цепей Маркова в данной задаче объясняется тем, что распределение процесса $\{\zeta(t); t \geqslant 0\}$ выражается через характеристики вложенной цепи Маркова (в предположении, что за любой конечный промежуток времени происходит лишь конечное число скачков).

Библиографические источники: [4, Гл. 3, § 3.3], [5, Раздел 3.4], [6, Гл. 1], [7, Гл. 2], [10, Т. 2, Гл. VI, § 11]

1.2. Счётные цепи Маркова

Приведем здесь сводку основных фактов из теории счётных однородных цепей Маркова. Не уменьшая общности полагают $T = \{0, 1, \ldots\}$ и вместо переменной t используют переменную $n = 0,\ 1,\ \ldots$, означающую номер «шага». Пусть $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счётное (конечное или бесконечное) множество, $\mathcal{E}$ — множество всех подмножеств E, X_0, X_1, $\ldots$ — последовательность случайных величин со значениями в E. Последовательность X_0, X_1, $\ldots$ называется (однородной) цепью Маркова, если для любого натурального n и любых $x_0' \in E$, $x_1' \in E$, $\ldots$, $x_n' \in E$ таких, что $\mathbf{P}\{X_0 = x_0', X_1 = x_1', \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}'\} > 0$ имеет место равенство

$$\mathbf{P}(\{X_n = x_n'\} | \{X_0 = x_0', X_1 = x_1', \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}'\}) = \\ = \mathbf{P}(\{X_n = x_n'\} | \{X_{n-1} = x_{n-1}'\}).$$

Точки множества E называются *состояниями* цепи Маркова. Функция $\mathbf{P}\{X_n = w | X_{n-1} = x\} = p(x, w)$ называется переходной вероятностью марковской цепи. Набор чисел $p_0(x) = \mathbf{P}\{X_0 = x\}$, $x \in E$ называется начальным распределением цепи Маркова. Тогда имеет место основное соотношение

$$\mathbf{P}\{X_0 = x_0', X_1 = x_1', \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}', X_n = x_n'\} = \\ = p_0(x_0') p(x_0', x_1') p(x_1', x_2') \times \ldots \times p(x_{n-1}', x_n'). \quad (1.1)$$

Цепь Маркова считается заданной, если задана пара $(p_0(\cdot), p(\cdot,\cdot))$. Действительно, пусть $\Omega = E \times E \times \ldots$ — пространство бесконечных последовательностей элементов из E, $\mathfrak{F}$ — наименьшая σ-алгебра подмножеств

Ω, содержащая все цилиндрические множества вида $\mathcal{J}(x'_0, x'_1, \ldots, x'_n) = \{\omega = (w_0, w_1, \ldots) \in \Omega\colon w_0 = x'_0, w_1 = x'_1, \ldots, w_n = x'_n\}$. Определим случайные величины $X_n(\omega) = w_n$ для $\omega = (w_0, w_1, \ldots, w_n, \ldots)$. По теореме И. Тулчи о продолжении меры, равенство (1.1) определяет единственную вероятностную меру на измеримом пространстве $(\Omega, \mathfrak{F})$. В частности, распределение величины X_n находится по формуле

$$p_n(x) = \mathbf{P}\{X_n = x\} = \sum_{w \in E} p_0(w) p_n(w, x),$$

где *n-шаговые переходные вероятности* $p_n(\cdot, \cdot)$ определяются рекуррентно по формулам

$$p_1(w, x) = p(w, x), \quad p_n(w, x) = \sum_{w_1 \in E} p(w, w_1) p_{n-1}(w_1, x).$$

Набор неотрицательных чисел $\pi(x)$, $x \in E$ образует *стационарное распределение вероятностей*, если имеют место равенства

$$\pi(x) = \sum_{w \in E} \pi(w) p(w, x), \quad x \in E; \qquad \sum_{x \in E} \pi(x) = 1.$$

Если все величины $\pi(x) > 0$, $x \in E$ то стационарное распределение называется *эргодическим*. Положив $p_0(x) = \pi(x)$, $x \in E$, будем иметь $p_n(x) = \pi(x)$, $x \in X$.

Состояния x и w из E называются *сообщающимися*, если существуют натуральные n_1 и n_2, такие что $p_{n_1}(x, w) > 0$ и $p_{n_2}(w, x) > 0$. Множество E разложимо на непересекающиеся множества сообщающихся состояний. Каждое такое множество сообщающихся состояний называется *неразложимым классом*. Марковская цепь, все состояния которой принадлежат единственному неразложимому классу, называется *неразложимой*. Некоторые авторы называют также неразложимую цепь *неприводимой* [3, Гл. 3, § 6]. Наименьшее общее кратное d чисел n, таких что $p_n(x, x) > 0$, называется *периодом* состояния x. Если $d = 1$, то состояние x называется апериодическим. Все состояния в пределах одного неразложимого класса имеют один период и распадаются на *циклические подклассы* E_0, E_1, ..., E_{d-1}, так что для любого состояния $x \in E_j$ возможен переход за один шаг только в класс E_{j+1} (из множества E_{d-1} только в множество E_0):

$$\sum_{w \in E_{j+1}} p(x, w) = 1, \qquad x \in E_j.$$

Предельное поведение вероятностей $p_n(x)$, $x \in E$ неразложимой цепи с периодом $d \neq 1$ при $n \to \infty$ существенно зависит от начального распределения. Пусть существует стационарное распределение $\pi(\cdot)$. Если $p_0(x) = \pi(x)$, $x \in E$, то $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x) = \pi(x)$ для всех x. Если $p_0(x) = 1$ для $x = x^0$ и $p_0(x) = 0$ для $x \neq x^0$, то последовательность $\{p_n(x); n = 0, 1, \ldots\}$ расходится, но сходятся подпоследовательности $\{p_{dn+j}(x); n = 0, 1, \ldots\}$, $j = 0,\ 1,\ \ldots,\ d-1$.

Для изучения асимптотических свойств переходных вероятностей счётной цепи Маркова $\{X_n \colon n = 0, 1, \ldots\}$ вводят случайные величины

$$\tau_x = \inf\{n \geqslant 1 \colon X_n = x\}, \qquad x \in E.$$

Вероятности

$$f_{x,x}^{(n)} = \mathbf{P}(\{\tau_x = n\} | \{X_0 = x\})$$

и

$$f_{x,w}^{(n)} = \mathbf{P}(\{\tau_w = n\} | \{X_0 = x\}), \quad w \neq x$$

называют *вероятностью первого возвращения* в состояние x на n-м шаге и *вероятностью первого попадания* в состояние w на n-м шаге. Величина

$$f_{x,w} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{x,w}^{(n)}$$

есть вероятность попадания, рано или поздно, в состояние w из состояния x. В частности, состояние x называется *возвратным*, если $f_{x,x} = 1$, и *невозвратным*, если $f_{x,x} < 1$. Для неразложимого класса сообщающихся состояний все его состояния одновременно либо возвратные, либо невозвратные. Классификация возвратных состояний производится по свойствам среднего времени первого возвращения. Возвратное состояние $x \in E$ называется *положительным*, если

$$\mu_x = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n f_{x,x}^{(n)}\Big)^{-1} > 0,$$

и называется *нулевым*, если $\mu_x = 0$. Здесь μ_x есть *среднее время возвращения* в состояние x. Если состояние $w \in E$ является возвратным и апериодическим, то $p_n(x, w) \to f_{x,w}\mu_w^{-1}$ при $n \to \infty$ для любого $x \in E$.

Решение вопроса о стационарных и эргодических распределениях счётной марковской цепи с бесконечным числом состояний содержится в следующих утверждениях:

— для существования единственного стационарного распределения необходимо и достаточно, чтобы существовал в точности один неразложимый класс положительных состояний;

— для существования эргодического распределения необходимо и достаточно, чтобы все состояния цепи образовывали единственный неразложимый апериодический класс положительных состояний.

Библиографические источники: [3], [5], [9, Гл. 5], [12, Гл. VIII].

Глава 2. Общие цепи Маркова

2.1. Стохастические переходные ядра. Марковское свойство

Для теории общих цепей Маркова, как и для теории счетных цепей Маркова, основными объектами являются начальное распределение вероятностей и переходные вероятности. Изучение свойств переходных вероятностей составляет главный путь для ответа на вопрос о предельном поведении марковской цепи, о возможности наличия у неё установившегося стационарного режима.

Пусть $(E, \mathcal{E})$ — измеримое пространство. Будем предполагать всюду, что σ-алгебра $\mathcal{E}$ порождена счётным семейством подмножеств E. Элементы множества E рассматриваются как возможные состояния системы.

Определение 1. *Неотрицательная функция $P(\cdot, \cdot)\colon E \times \mathcal{E} \to [0, 1]$ называется* стохастическим ядром*, если 1) для каждого $x \in E$ функция $P(x, \cdot)$ есть вероятность на $(E, \mathcal{E})$, и 2) для каждого $A \in \mathcal{E}$ функция $P(\cdot, A)$ измерима.*

Вероятность $\lambda(\cdot)$ на $(E, \mathcal{E})$ и стохастическое ядро $P(\cdot, \cdot)$ позволяют построить согласно теореме И. Тулчи стохастическую последовательность $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_\lambda)$, где $\Omega = E^\infty$ — пространство бесконечных последовательностей элементов из E, $\mathcal{F}$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая все цилиндрические множества, а $\mathbf{P}_\lambda(\cdot)$ — вероятность на $(E, \mathcal{E})$, определённая на цилиндрических множествах равенством

$$\mathbf{P}_\lambda\{\omega = (u_0, u_1, \ldots)\colon u_0 \in A_0, u_1 \in A_1, \ldots, u_n \in A_n\} = \\ = \int\limits_{A_0} \lambda(du_0) \int\limits_{A_1} P(u_0, du_1) \ldots \int\limits_{A_n} P(u_{n-1}, du_n). \quad (2.1)$$

Полагают $X_n(\omega) = u_n$, $n = 0{,}1, \ldots$. Если вероятностная мера $\lambda(\cdot)$ сосредоточена в точке $x \in E$, то используется также обозначение $\mathbf{P}_x$.

Мероопределение (2.1) приводит к так называемому *марковскому свойству* для условных распределений: с $\mathbf{P}_\lambda$-вероятностью 1

$$\mathbf{P}_\lambda(\{X_n \in A_n\}|X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}) = \\ = \mathbf{P}_\lambda(\{X_n \in A_n\}|X_{n-1}) = P(X_{n-1}, A_n), \quad A_n \in \mathcal{E}. \quad (2.2)$$

Переходные n-шаговые вероятности (итерированные стохастические ядра) определяются последовательно как

$$P_0(x, A) = I(x \in A), \qquad P_1(x, A) = P(x, A),$$
$$P_{n+1}(x, A) = \int\limits_E P_n(x, du)P(u, A), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Вероятностный смысл переходных вероятностей за n шагов следующий:

$$\mathbf{P}_x\{X_n \in A\} = P_n(x, A).$$

По индукции можно доказать равенство (уравнение Колмогорова – Чепмена)

$$P_{m+n}(x, A) = \int\limits_E P_m(x, du)P_n(u, A). \quad (2.3)$$

Основной интерес для нас будет представлять поведение вероятностей $P_n(x, A)$ при $n \to \infty$. В связи с этим дадим следующее определение.

Определение 2. *Множество $A \in \mathcal{E}$ называется* нулевым, *если для всех $x \in A$*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x, A) = 0.$$

Множество $A \in \mathcal{E}$ называется положительным, *если для всех $x \in A$*

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(x, A) > 0.$$

Введём необходимые в дальнейшем случайные величины. Для марковской цепи $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ случайная величина

$$\eta_A = \sum_{n=1}^{\infty} I(X_n \in A)$$

есть время пребывания во множестве $A \in \mathcal{E}$; величины

$$\tau_A = \min\{n \geqslant 1\colon X_n \in A\},$$

$$\sigma_A = \min\{n \geqslant 0\colon X_n \in A\}$$

обозначают моменты первого возвращения и первого посещения множества $A \in \mathcal{E}$ соответственно. С этими случайными величинами связаны следующие важные в теории общих цепей Маркова функции:

$$U(x, A) = \int\limits_{\Omega} \eta_A(\omega)\, \mathbf{P}_x(d\omega) = \mathbf{M}_x(\eta_A) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x, A),$$

$$L(x, A) = \mathbf{P}_x\{\tau_A < \infty\} = \mathbf{P}_x\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n \in A\}\Big).$$

Функция $U(\cdot,\cdot)$ называется *потенциалом*, порождённым переходной вероятностью $P(\cdot,\cdot)$ и может принимать бесконечное значение для некоторых множеств $A \in \mathcal{E}$. Вероятность $L(x, A)$ удовлетворяет уравнению

$$L(x, A) = P(x, A) + \int\limits_{E \setminus A} P(x, du) L(u, A).$$

Определим *оператор сдвига* $\theta\colon \Omega \to \Omega$ на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ с $\omega = (u_0, u_1, \ldots)$ равенством: $\theta\big((u_0, u_1, \ldots,)\big) = (u_1, u_2, \ldots)$. Тогда, очевидно, $X_n(\theta(\omega)) = X_{n+1}(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$ и $n \geqslant 0$. Индуктивно определяются степени оператора сдвига: $\theta_1(\cdot) = \theta(\cdot)$, $\theta_{n+1}(\cdot) = \theta(\theta_n(\cdot))$. Дополнительно полагают $\theta_0(\omega) = \omega$. Неотрицательная целочисленная расширенная случайная величина T называется *моментом остановки* относительно семейства сигма-алгебр $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, если для всех $n \geqslant 0$ имеет место соотношение $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$. Это означает, что для всех $n \geqslant 0$ событие $\{T = n\}$ эквивалентно событию $\{(X_0, X_1, \ldots, X_n) \in B_n\}$ для некоторого множества $B_n \in \mathcal{E}^{\otimes(n+1)}$. С моментом остановки T интересно связать сигма-алгебру $\mathcal{F}_T$ «событий, наблюдаемых до случайного момента T»:

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}\colon \{T = n\} \cap A \in \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots\}.$$

Теорема 1. *Имеет место* строго марковское свойство*: для любых A_1, A_2, …, A_m из $\mathcal{E}$ и любого момента остановки T относительно $\{\mathcal{F}_n; n = 0, 1, \ldots\}$ $\mathbf{P}_\lambda$-почти наверное*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\lambda(\{X_{T+1} \in A_1, X_{T+2} \in A_2, \ldots, X_{T+m} \in A_m\} | \mathcal{F}_T) &= \\ = \mathbf{P}_{X_T}(\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_m \in A_m\}). \quad (2.4)\end{aligned}$$

Доказательство. Требуется установить, что для каждого $A \in \mathcal{F}_T$ интегралы от левой и правой частей равенства (2.4) совпадают. Из определения условного математического ожидания (применительно к условной вероятности) имеем:

$$\int\limits_A \mathbf{P}_\lambda(\{X_{T+1} \in A_1, X_{T+2} \in A_2, \ldots, X_{T+m} \in A_m\}|\mathcal{F}_T)\mathbf{P}_\lambda(d\omega) =$$

$$= \mathbf{P}_\lambda(\{X_{T+1} \in A_1, X_{T+2} \in A_2, \ldots, X_{T+m} \in A_m\} \cap A) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_\lambda(\{X_{T+1} \in A_1, X_{T+2} \in A_2, \ldots, X_{T+m} \in A_m, T = n\} \cap A) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_\lambda(\{X_{n+1} \in A_1, X_{n+2} \in A_2, \ldots, X_{n+m} \in A_m, T = n\} \cap A),$$

и

$$\mathbf{P}_\lambda(\{X_{n+1} \in A_1, X_{n+2} \in A_2, \ldots, X_{n+m} \in A_m, T = n\} \cap A) =$$

$$= \int\limits_{\{T=n\}\cap A} \mathbf{P}_\lambda(\{X_{n+1} \in A_1, X_{n+2} \in A_2, \ldots, X_{n+m} \in A_m\}|\mathcal{F}_n)\mathbf{P}_\lambda(d\omega) =$$

$$= \int\limits_{\{T=n\}\cap A} \mathbf{P}_{X_n}(\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_m \in A_m\})\mathbf{P}_\lambda(d\omega) =$$

$$= \int\limits_{\{T=n\}\cap A} \mathbf{P}_{X_T}(\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_m \in A_m\})\mathbf{P}_\lambda(d\omega).$$

Эти две цепочки равенств доказывают теорему. □

Библиографические источники: [12, Гл. VIII], [8, Гл. 1], [13, Раздел 3].

2.2. Неприводимые цепи

Непосредственное перенесение понятия сообщающихся состояний на случай общего пространства состояний встречает ту трудность, что может оказаться $P(x, \{y\}) = 0$ для любой пары состояний x, y. Например, такая ситуация имеет место если при каждом x вероятность

$$P(x, A) = \int\limits_A p(x, u)\, du,$$

то есть $P(x, \cdot)$ имеет плотность распределения $p(x, \cdot)$.

Определение 3. *Стохастическое ядро* $P(\cdot, \cdot)$ *называется* φ-неприводимым*, если существует мера* $\varphi(\cdot)$ *на измеримом пространстве* $(E, \mathcal{E})$*, такая что* $L(x, A) > 0$ *для всякого множества* $A \in \mathcal{E}$ *с* $\varphi(A) > 0$ *и для всех* $x \in E$*. Цепь Маркова* $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ *с* φ*-неприводимой переходной вероятностью* $P(\cdot, \cdot)$ *также называется* φ*-неприводимой.*

Легко видеть, что данное определение φ-неприводимости эквивалентно следующим утверждениям:

— для всех $x \in E$ из $\varphi(A) > 0$ следует $U(x, A) > 0$;

— для каждых $x \in E$ и $A \in \mathcal{E}$ с $\varphi(A) > 0$ существует натуральное $n = n(x, A)$, такое что $P_n(x, A) > 0$;

— для всех $x \in E$ из $\varphi(A) > 0$ для $A \in \mathcal{E}$ следует

$$K_\varepsilon(x, A) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, A)\varepsilon(1 - \varepsilon)^n > 0, \qquad 0 < \varepsilon < 1.$$

Приведённое определение φ-неприводимости согласуется с неприводимостью счётной цепи Маркова следующим образом. Если множество E счётно, то возьмём в качестве меры φ считающую меру $|\cdot|$, для которой $|A|$ равно числу элементов во множестве A. Неравенство $|A| > 0$ означает, что множество A не пусто, тогда $L(x, A) = \sum\limits_{y \in A} L(x, \{y\})$, а $L(x, \{y\}) > 0$ означает $P_n(x, \{y\}) > 0$ для некоторого n. Наоборот, из $L(y, \{x\}) > 0$ следует $P_m(y, \{x\}) > 0$. Таким образом, любые два состояния x и y сообщаются.

Переходная вероятность может быть φ-неприводимой для более чем одной меры φ. В связи с этим, важную роль играет следующее утверждение.

Теорема 2. *Если стохастическое ядро* $P(\cdot, \cdot)$ φ*-неприводимо для некоторой меры* φ*, то существует* вероятностная мера $\psi(\cdot)$ *на измеримом пространстве* $(E, \mathcal{E})$*, такая что 1)* $P(\cdot, \cdot)$ *является* ψ*-неприводимым, 2) любая другая мера* $\varphi'(\cdot)$ *определяет* φ'*-неприводимость тогда и* *только тогда, когда φ' абсолютно-непрерывна относительно ψ, 3) если $\psi(A) = 0$, то $\psi\{x\colon L(x, A) > 0\} = 0$; 4) вероятностная мера $\psi(\cdot)$ эквивалентна мере*

$$\psi'(A) = \int\limits_E \varphi'(du) K_\varepsilon(u, A)$$

для каждой конечной определяющей неприводимость меры $\varphi'(\cdot)$.

Доказательство. Не уменьшая общности, будем считать, что $\varphi(E) = 1$. Выберем $0 < \varepsilon < 1$ и определим меру $\psi(\cdot)$ на $(E, \mathcal{E})$ равенством

$$\psi(A) = \int\limits_E \varphi(du) K_\varepsilon(u, A). \tag{2.5}$$

Легко убедиться, что $\psi(\cdot)$ также является вероятностной мерой. Рассмотрим множества

$$\bar{A}(k) = \Big\{x\colon \sum_{n=1}^{k} P_n(x, A) > k^{-1}\Big\}.$$

Тогда $\bar{A}(k) \subset \bar{A}(k+1)$ и $\lim_k \bar{A}(k) = E_0 = \{x\colon \sum\limits_{n \geqslant 1} P_n(x, A) > 0\}$. При этом, $K_\varepsilon(x, A) = 0$ для $x \notin E_0$. Поскольку функция $P(\cdot, A)$ измерима по первому аргументу, множество $\bar{A}(k) \in \mathcal{E}$. Пусть $\psi(A) > 0$. Покажем, что тогда $L(x, A) > 0$ для всех $x \in E$. Имеем:

$$0 < \int\limits_E \varphi(du) K_\varepsilon(u, A) = \int\limits_{E_0} \varphi(du) K_\varepsilon(u, A) = \lim_k \int\limits_{\bar{A}(k)} \varphi(du) K_\varepsilon(u, A).$$

Тогда существует натуральное k, такое что $\varphi(\bar{A}(k)) > 0$. Теперь из φ-неприводимости следует существование натурального m, такого что $P_m(x, \bar{A}(k)) > 0$. Затем,

$$L(x, A) \geqslant \sum_{n=1}^{k} P_{m+n}(x, A) =$$

$$= \int\limits_E P_m(x, du) \Big(\sum_{n=1}^{k} P_k(u, A)\Big) \geqslant k^{-1} P_m(x, \bar{A}(k)) > 0.$$

Таким образом, ядро $P(\cdot,\cdot)$ является ψ-неприводимым.

Пусть теперь имеется еще одна мера, $\varphi'(\cdot)$, такая что ядро $P(\cdot,\cdot)$ является φ'-неприводимым. Тогда из неравенства $\varphi'(A) > 0$ следует, что для всех $x \in E$ будет $L(x,A) > 0$, откуда $K_\varepsilon(x,A) > 0$ и, значит, $\psi(A) > 0$ в силу формулы (2.5). Таким образом, мера $\varphi'(\cdot)$ абсолютно непрерывна относительно $\psi(\cdot)$. Предположим теперь, что стохастическое ядро $P(\cdot,\cdot)$ ψ-неприводимо и $\varphi'(\cdot)$ абсолютно непрерывна относительно $\psi(\cdot)$. То есть, из $\varphi'(A) > 0$ следует $\psi(A) > 0$. Но теперь из ψ-неприводимости имеем $K_\varepsilon(x,A) > 0$ для всех $x \in E$, что эквивалентно $L(x,A) > 0$ для всех $x \in E$. Это означает φ'-неприводимость стохастического ядра $P(\cdot,\cdot)$.

Для доказательства пункта 3 используем неравенства

$$\int\limits_E \psi(du)P_m(u,A)(1-\varepsilon)^{-m} = \int\limits_E \varphi(du)\sum_{n=1}^{\infty} P_{m+n}(u,A)\varepsilon(1-\varepsilon)^{-m-n} \leqslant \psi(A).$$

Поэтому из $\psi(A) = 0$ следует

$$0 = \int\limits_E \psi(du)P_m(u,A) = \int\limits_{E_0} \psi(du)P_m(u,A) + \int\limits_{E\setminus E_0} \psi(du)P_m(u,A).$$

В силу определения E_0 имеем

$$\int\limits_{E\setminus E_0} \psi(du)P_m(u,A) = 0,$$

и

$$0 = \sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{E_0} \psi(du)P_m(u,A) = \int\limits_{E_0} \psi(du)L(u,A).$$

Поскольку $L(u,A) > 0$ для всех $u \in E_0$, предположение $\psi(E_0) > 0$ ведёт к противоречию. $\square$

Будем называть стохастическое ядро $P(\cdot,\cdot)$ ψ-неприводимым, если оно φ-неприводимо для некоторой меры $\varphi(\cdot)$, а $\psi(\cdot)$ есть максимальная определяющая неприводимость мера, существование которой установлено в теореме 2. Марковскую цепь $\{X_n; n = 0,1,\ldots\}$ с ψ-неприводимой переходной вероятностью $P(\cdot,\cdot)$ также называют ψ-неприводимой цепью. Класс всех множеств из $\mathcal{E}$, имеющих положительную меру $\psi(\cdot)$, обозначается $\mathcal{E}^+$:

$$\mathcal{E}^+ = \{A \in \mathcal{E} \colon \psi(A) > 0\}.$$

Множество $A \in \mathcal{E}^+$ называется *ψ-положительным.*

Понятие максимальной меры, определяющей неприводимость, является нетривиальным. Пусть $\psi(\cdot)$ — максимальная мера, определяющая неприводимость стохастического ядра $P(\cdot, \cdot)$. Рассмотрим сужение меры $\psi(\cdot)$ на некоторое множество $B \in \mathcal{E}$: $\varphi_B(A) = \psi(A \cap B)$. Тогда ядро $P(\cdot, \cdot)$ также окажется φ_B-неприводимым, а мера ψ однозначно, с точностью до эквивалентности, восстанавливается по формуле (2.5) по своему сужению на множество B.

Определим отношение $x \to A$ на прямом произведении $E \times \mathcal{E}$ следующим образом: $x \to A$ тогда и только тогда, когда $L(x, A) > 0$. Если $x \to A$, то говорят, что множество A *достижимо* из состояния x.

Теорема 3. *Пусть стохастические ядро $P(\cdot, \cdot)$ ψ-неприводимо, $\psi(A) > > 0$ и $x \to B$ для всех $x \in A$. Тогда $\psi(B) > 0$.*

Доказательство. Утверждение следует из конструкции максимальной меры (2.5), определяющей неприводимость. □

Определение 4. *Множество $F \in \mathcal{E}$ называется* замкнутым *относительно стохастического ядра $P(\cdot, \cdot)$, если*

$$P(x, E \setminus F) = 0 \qquad \text{для всех } x \in F.$$

Пусть стохастическое ядро $P(\cdot, \cdot)$ ψ-неприводимо. Множество $F \in \mathcal{E}$ называется полным*, если $\psi(E \setminus F) = 0$.*

Теорема 4. *Замкнутое множество является полным. В любом полном множестве содержится непустое замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть A — замкнутое множество. Тогда для всех $x \in \in A$ следует $P_1(x, E \setminus A) = P(x, E \setminus A) = 0$. Допустим, что $P_{n-1}(x, E \setminus A) = = 0$ для всех $x \in A$ и некоторого натурального n. Тогда из уравнения Колмогорова – Чепмена получим

$$P_n(x, E \setminus A) = \int\limits_{E \setminus A} P(x, dw) P_{n-1}(w, E \setminus A) + \\ + \int\limits_{A} P(x, dw) P_{n-1}(w, E \setminus A) = 0.$$

Здесь первый интеграл равен нулю, так как область интегрирования имеет нулевую $P(x,\cdot)$-меру. Таким образом, по индукции $P_n(x, E \setminus A) = 0$ для всех $x \in A$ и всех натуральных n. Но тогда $L(x, E \setminus A) = 0$ для всех $x \in A$ и из ψ-неприводимости должно быть $\psi(E \setminus A) = 0$.

Предположим теперь, что A — полное множество. Положим

$$B = \Big\{x \in E\colon \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, E \setminus A) = 0\Big\}.$$

Поскольку $P_0(x, E \setminus A) = 1$ для $x \in E \setminus A$, то $B \subset A$. В силу пункта 3 теоремы 2, $\psi(B) > 0$ и B не пусто. Наконец, если $P(x, E \setminus B) > 0$ для некоторого $x \in B$, из уравнения Колмгорова – Чепмена имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x, E \setminus A) \geqslant \int\limits_{E \setminus B} P(x, dw) \Big\{\sum_{n=0}^{\infty} P_n(w, E \setminus A)\Big\} > 0.$$

Но этого быть не может, значит, B — искомое замкнутое множество. $\square$

Библиографические источники: [8, Глава 2], [13, Раздел 4.2].

2.3. Минорантные множества и цикличность

В теории общих цепей Маркова ключевую роль играют определяемые ниже *минорантные* множества. Во многих аспектах они аналогичны отдельным состояниям у счётной марковской цепи. Основное теоретическое достоинство минорантных множеств заключено в конструкции «расщеплённой цепи», которая выходит за рамки настоящего учебного пособия. Однако, и для анализа марковских моделей реальных процессов минорантные множества оказываются полезными, как будет показано в главе 3.

Определение 5. *Множество $A \in \mathcal{E}^+$ называется* минорантным, *если существуют натуральное m и нетривиальная мера $\nu_m(\cdot)$, такие что для всех $x \in A$ и $B \in \mathcal{E}$ выполнено неравенство*

$$P_m(x, B) \geqslant \nu_m(B).$$

*В этом случае множество A называют ν_m-*минорантным.

Из определения минорантного множества следует, что мера $\nu_m(\cdot)$ определяет неприводимость стохастического ядра $P(\cdot,\cdot)$. Действительно, из неприводимости следует, что для любого $x \in E$ найдется натуральное число n, такое что $P_n(x, A) > 0$. Тогда

$$P_{n+m}(x, B) \geqslant \int\limits_A P_n(x, dw) P_m(w, B) \geqslant P_n(x, A) \nu_m(B).$$

Если $\nu_m(B) > 0$, то $P_{n+m}(x, B) > 0$. Итак, из $\nu_n(B) > 0$ следует $L(x, B) > 0$ для всех $x \in E$. Следовательно, мера $\nu_n(\cdot)$ абсолютно непрерывна относительно максимальной определяющей неприводимость меры $\psi(\cdot)$.

Далее, всегда можно выбрать меру $\nu_m(\cdot)$ таким образом, что $\nu_m(A) > > 0$. Для множества $A \in \mathcal{E}^+$ имеем $K_\varepsilon(x, A) > 0$ для всех $x \in E$. Тогда

$$0 < \int\limits_E \nu_m(dx) K_\varepsilon(x, A) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(1-\varepsilon)^n \int\limits_E \nu_m(dx) P_n(x, A),$$

значит, для некоторого n будем иметь

$$\int\limits_E \nu_m(dx) P_n(x, A) > 0.$$

Рассмотрим меру

$$\nu_{m+n}(\cdot) = \int\limits_E \nu_m(dx) P_n(x, \cdot)\,.$$

Убедимся, что множество A одновременно и ν_{n+m}-минорантное. Для произвольного $x \in A$ и $B \in \mathcal{E}$ имеем

$$P_{m+n}(x, B) = \int\limits_E P_m(x, dw) P_n(w, B) \geqslant \int\limits_E \nu_m(dw) P_n(w, B) = \nu_{n+m}(B).$$

Здесь использовано следующее свойство интеграла Лебега: если $\lambda(\cdot)$ и $\mu(\cdot)$ — меры на $(E, \mathcal{E})$, такие что $\lambda(A) \geqslant \mu(A)$ всюду на $\mathcal{E}$, а $f(x)$ — $\mathcal{E}$-измеримая функция, то

$$\int\limits_E f(x) \lambda(dx) \geqslant \int\limits_E f(x) \mu(dx).$$

Данное неравенство очевидно для простых функций $f(\cdot)$ и распространяется на произвольные измеримые функции обычным образом.

Оказывается, у ψ-неприводимой марковской цепи минорантные множества обязательно существуют. Точнее, для любого множества $B \in \mathcal{E}^+$ существуют натуральное m, мера $\nu_m(\cdot)$ и соответствующее минорантное множество $A \subset B$, такие что $A \in \mathcal{E}^+$ и $\nu_m(A) > 0$. Этот факт является следствием счётной порождённости σ-алгебры $\mathcal{E}$. Более того, отыскав хотя бы одно минорантное множество, мы можем указать покрытие всего пространства E минорантными множествами. Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 5. *Если множество A является ν_n-минорантным, а для каждого $x \in B$ выполнено неравенство $P_m(x, A) \geqslant \delta$, тогда множество B необходимо ν_{m+n}-минорантное и мера $\nu_{m+n}(\cdot)$ отличается от $\nu_n(\cdot)$ постоянным множителем.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся уравнением Колмогорова – Чепмена (2.3). Для $x \in B$ и $C \in \mathcal{E}$ имеем:

$$P_{m+n}(x, C) = \int\limits_E P_m(x, dy) P_n(w, C) \geqslant \int\limits_A P_m(x, dy) P_n(w, C) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_A P_m(x, dy) \nu_n(C) = P_m(x, A) \nu_n(C) \geqslant \delta \nu_n(C).$$

Итак, достаточно положить $\nu_{m+n}(\cdot) = \delta \nu_n(\cdot)$. □

Также как и для счётных цепей, у цепи Маркова с общим пространством состояний выделяют циклические подклассы, между которыми только и осуществляются переходы за один шаг.

Определение 6. *Последовательность E_0, E_1, ..., E_{m-1} непересекающихся подмножеств из $\mathcal{E}$ называется m-*циклом*, если для каждого $i = 0, 1, \ldots, m-1$ и для каждого $x \in E_i$ оказывается*

$$P(x, E_j) = 1, \qquad j \equiv i + 1 \mod m.$$

Циклический подкласс у счётной марковской цепи состоит из отдельных состояний. Так же и минорантное множество принадлежит не более чем одному из компонент E_i цикла с точностью до подмножества ψ-меры ноль.

Теорема 6. *Пусть стохастическое ядро* $P(\cdot,\cdot)$ ψ*-неприводимо,* E_i, $i = 0, 1, \ldots, m-1$ *—* m*-цикл и* A *—* ν_n*-минорантное множество. Обозначим* $N = E \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} E_i$. *Тогда найдётся индекс* i, $0 \leqslant i < m$, *такой, что* $A \subset E_i \cup N$ *и* $\nu_n(E \setminus E_j) = 0$ *для* $j = i + n \mod m$.

Доказательство. Множество N имеет нулевую ψ-меру как дополнение к замкнутому и полному (по теореме 4) множеству $E_0 \cup E_1 \cup \ldots \cup E_{m-1}$. Из абсолютной непрерывности меры $\nu_n(\cdot)$ относительно меры $\psi(\cdot)$ следует равенство $\nu_n(N) = 0$. Значит, найдётся такое i, $0 \leqslant i < m-1$, что $\nu_n(E_i) > 0$ (напомним, мера $\nu_n(\cdot)$ не равна тождественно нулю). Тогда неравенство $P_n(x, E_j) \geqslant \nu_n(E_j) > 0$ возможно, только если $x \in E_i$ и $i \equiv j - n \mod m$, или если $x \in N$, т.е. $A \subset E_i \cup N$. Для $j' \neq j$, в силу определения m-цикла, имеем $P_n(x, E_{j'}) = 0$, откуда $\nu_n(E_{j'}) = 0$. □

Пусть A — минорантное множество и мера $\nu_m(\cdot)$ выбрана так, что $\nu_m(A) > 0$. Тогда условие минорантности $P_m(x, A) \geqslant \nu_m(A) > 0$ для $x \in A$ означает, что марковская цепь, стартуя из множества A, с положительной вероятностью вернётся в исходное множество A через m шагов. Рассмотрим все числа m, обладающие этим свойством:

$$I = \{m \geqslant 1 \colon A - \nu_m\text{-минорантное с } \nu_m(A) > 0\}.$$

Обозначим d наибольший общий делитель чисел из множества I. Покажем, что если $m \in I$ и $m' \in I$, то $m + m' \in I$. Действительно, для $x \in A$ имеем

$$P_{m+m'}(x, B) \geqslant \int\limits_A P_m(x, dw) P_{m'}(w, B) \geqslant \nu_{m'}(B)\nu_m(A)$$

и $P_{m+m'}(x, A) > 0$. Поскольку I замкнуто относительно сложения, оно содержит все достаточно большие кратные d.

Теорема 7. *Пусть* $P(\cdot,\cdot)$ *—* ψ*-неприводимое стохастическое ядро,* A *—* ν_M*-минорантное множество и число* d *как определено выше. Тогда существует* d*-цикл* $E_0, E_1, \ldots, E_{d-1}$, *а число* d *не зависит от выбора множества* A *и меры* ν_M.

Доказательство. Положим для $i = 0, 1, \ldots, d-1$

$$\tilde{E}_i = \Big\{x \colon \sum_{n=1}^{\infty} P_{nd-i}(x, A) > 0\Big\}.$$

Тогда объединение

$$\bigcup_{i=0}^{d-1} \tilde{E}_i = \Big\{x\colon \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x,A) > 0\Big\}$$

совпадает со всем E в силу предположения о ψ-неприводимости. Покажем, что любые два множества $\tilde{E}_i$, $\tilde{E}_k$, $i \neq k$, могут иметь только ψ-нулевые пересечения. Положим $\tilde{E}_{i,n,r} = \{x\colon P_{nd-i}(x,A) \geqslant r^{-1}\}$ для $r > 0$. Нетрудно убедиться в представлении

$$\tilde{E}_i \cap \tilde{E}_k = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcup_{s=1}^{\infty} \tilde{E}_{i,n,r} \cap \tilde{E}_{k,m,s}.$$

Предположим, что $\psi(\tilde{E}_i \cap \tilde{E}_k) > 0$. Тогда найдутся такие натуральные m, n, r и s, что окажется $\psi(\tilde{E}_{i,n,r} \cap \tilde{E}_{k,m,s}) > 0$. Заметим, что для всех $x \in C = \tilde{E}_{i,n,r} \cap \tilde{E}_{k,m,s}$ выполняются оценки

$$P_{nd-i}(x,A) \geqslant 1/r, \qquad P_{md-k}(x,A) \geqslant 1/s. \tag{2.6}$$

Кроме того, из ψ-неприводимости стохастического ядра $P(\cdot,\cdot)$ и неравенства $\psi(C) > 0$ следует для некоторого q неравенство

$$\int\limits_A \nu_M(dx) P_q(x,C) = \delta_q > 0. \tag{2.7}$$

Действительно, предположение

$$\int\limits_A \nu_M(dx) P_q(x,C) = 0, \qquad q = 0,1,\ldots$$

влечет $P_q(x,C) = 0$ тождественно по $x \in A$, чего не может быть, так как $\psi(A) > 0$. Наконец, поскольку множество A — ν_M-минорантное, с учётом оценок (2.6), (2.7), для любого $B \subset A$ имеем

$$\begin{aligned}
&P_{2M+nd-i+q}(x,B) \geqslant \\
&\quad \geqslant \int\limits_A P_M(x,dy) \int\limits_C P_q(y,dw) \int\limits_A P_{nd-i}(w,dz) P_M(z,B) \geqslant \\
&\quad\quad \geqslant \int\limits_A P_M(x,dy) \int\limits_C P_q(y,dw) P_{nd-i}(w,A) \nu_M(B) \geqslant \\
&\quad\quad\quad \geqslant \int\limits_A \nu_M(dy) P_q(y,C) r^{-1} \nu_M(B) \geqslant \delta_q r^{-1} \nu_M(B).
\end{aligned}$$

Следовательно, число $2M+md+q-i$ входит в множество I. Аналогично показывается, что $2M+nd+q-k \in I$. Отсюда $i \equiv k \mod d$, что противоречит определению числа d. Итак, противоречие доказывает, что $\psi(\tilde{E}_i \cap \tilde{E}_k) = 0$. Положим

$$N = \bigcup_{i=0}^{d-1} \bigcup_{k=0}^{d-1} \tilde{E}_i \cap \tilde{E}_k.$$

По доказанному, $\psi(N) = 0$. Множества $\tilde{E}_i \setminus N$, $i = 0, 1, \ldots, d-1$, попарно не пересекаются и их объединение полно. По теореме 4 существует непустое замкнутое множество $D \subset E \setminus N$. Положим $E_i = D \cap (\tilde{E}_i \setminus N)$. Тогда $E_0, E_1, \ldots, E_{d-1}$ есть разбиение множества D и d-цикл. Из теоремы 6 следует, что если $E'_0, E'_1, \ldots, E'_{d'-1}$ — другой цикл, то d' делит d, а каждое множество E'_i с точностью до ψ-нулевого множества есть объединение d/d' множеств из набора $E_0, E_1, \ldots, E_{d-1}$. Следовательно, цикл не зависит от выбора минорантного множества A $\square$

В связи с фактами, содержащимися в теоремах 6, 7, введём в рассмотрение классы $\mathcal{S}_i^+$, $i = 0, 1, \ldots, d-1$, минорантных множеств A, таких что $A \cap E_j = \varnothing$ при $j \neq i$. Очевидно, что из $A \in \mathcal{S}_i^+$ и $A' \subset A$, $\psi(A') > 0$, следует $A' \in \mathcal{S}_i^+$. Также из $C \in \mathcal{S}_i^+$ следует $C' = \{x\colon P_q(x,C) > 0\} \in \mathcal{S}_{i-q}^+$. Наконец, если $C \in \mathcal{S}_i^+$ и $C' \in \mathcal{S}_i^+$, то $C \cup C' \in \mathcal{S}_i^+$. Для доказательства последнего свойства предположим, что множество C — ν_M-минорантное, а множество C' — $\nu_{M'}$-минорантное и выберем достаточно большие m и m' из множества I, такие что $m = m' + M' - M$. Тогда для $x \in C$ и $B \in \mathcal{E}$

$$P_{m+2M}(x,B) \geqslant \int\limits_E P_M(x,dy) \int\limits_C P_m(y,dz) \int P_M(z,B) \geqslant \\ \geqslant \nu_M(B) \int\limits_E \nu_M(dy) P_m(y,C),$$

а для $x \in C'$ —

$$P_{m+2M}(x,B) = P_{m'+M+M'}(x,B) \geqslant \\ \geqslant \int\limits_E P_{M'}(x,dy) \int\limits_{C'} P_{m'}(y,dz) \int P_M(z,B) \geqslant \\ \geqslant \nu_M(B) \int\limits_E \nu_{M'}(dy) P_{m'}(y,C),$$

откуда

$$P_{m+2M}(x,B) \geqslant \nu_M(B)\min\Big\{\int\limits_E \nu_M(dy)P_m(y,C),\int\limits_E \nu_{M'}(dy)P_{m'}(y,C)\Big\}$$

для $x\in C\cup C'$.

Определение 7. *Если* $d=1$, *то стохастическое ядро* $P(\cdot,\cdot)$ *называется* апериодическим. *Если* $d>1$, *то стохастическое ядро* $P(\cdot,\cdot)$ *называют* периодическим, *а число* d *называют* периодом.

Теорема 8. *Существует не более чем счётное разбиение множества* E *на минорантные множества* A_m, $m=1,\,2,\,\ldots$.

Доказательство. Выберем некоторое минорантное множество A. Рассмотрим множества

$$C_m^{(i)}=\Big\{x\colon \sum_{n=1}^{m}P_{nd-i}(x,A)\geqslant m^{-1}\Big\}.$$

Тогда $C_m^{(i)}\subset C_{m+1}^{(i)}$ и

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}C_m^{(i)}=\tilde E_i,$$

где снова встретилось введённое при доказательстве теоремы 7 множество $\tilde E_i$. Таким образом, класс ψ-положительных множеств $C_m^{(i)}$, $m\geqslant 1$, $0\leqslant i\leqslant d-1$, образует не более чем счётное покрытие множества E. Наконец, множества $C_m^{(i)}$ — минорантные для достаточно больших m. □

Итак, минорантные множества во многом подобны дискретным состояниям счётной марковской цепи: счётное их число образует разбиение всего пространства состояний цепи и элементы разбиения могут быть объединены в циклические подклассы.

Библиографические источники: [8, Глава 2], [13, Раздел 5.3].

2.4. Возвратность и невозвратность

Для изучения предельных свойств общей марковской цепи, как и для счётной цепи, выделяют возвратные и невозвратные цепи.

Определение 8. *1) Множество $A \in \mathcal{E}$ называется* равномерно невозвратным, *если существует константа $M < \infty$, такая что $\mathbf{M}_x \eta_A \leqslant M$ для всех $x \in A$. Множество $A \in \mathcal{E}$ называется* невозвратным, *если его можно покрыть счётным числом равномерно невозвратных множеств. Множество $A \in \mathcal{E}$ называется* возвратным, *если для всех $x \in A$ имеет место равенство $\mathbf{M}_x \eta_A = \infty$.*

2) Цепь Маркова $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ называется возвратной, *если она ψ-неприводима и $U(x, A) = \infty$ для каждого $x \in E$ и каждого $A \in \mathcal{E}^+$. Цепь Маркова $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ называется* невозвратной, *если она ψ-неприводима и множество E является невозвратным.*

Если множество A равномерно невозвратно, то оно является нулевым в смысле определения 2. Действительно, необходимое условие сходимости ряда

$$\mathbf{M}_x(\eta_A) = U(x, A) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x, A)$$

имеет вид $P_n(x, A) \to 0$ при $n \to \infty$. Покажем, что это предельное соотношение имеет место не только для $x \in A$, но и для любых $x \in$ $\in E$. Введём *табу-вероятности* ${}_AP_n(x, B) = \mathbf{P}_x\{X_n \in B, \tau_A \geqslant n\}$. Из строго марковского свойства цепи $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ имеем разложение по моменту первого входа: для произвольного множества $B \in \mathcal{E}$

$$P_n(x, B) = {}_AP_n(x, B) + \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_A {}_AP_j(x, dw) P_{n-j}(w, B).$$

В частности, для $x \notin A$ и $B = A$ имеем

$$P_n(x, A) = {}_AP_n(x, A) + \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_A {}_AP_j(x, dw) P_{n-j}(w, A),$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x, A) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_AP_n(x, A) + \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_A P_j(x, dw) \sum_{n=j+1}^{\infty} P_{n-j}(w, A) \leqslant 1 + M.$$

А это значит, что $P_n(x, A) \to 0$ и для $x \notin A$. Тогда, по теореме о мажорируемой сходимости ($P_n(x, A) < 1$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$), для любого начального распределения $\lambda(\cdot)$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_\lambda\{X_n \in A\} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E P_n(x, A)\, \lambda(dx) = 0.$$

Пусть случайная величина $L_B = \sup\{n \geqslant 0\colon X_n \in B\}$ обозначает *момент последнего выхода* из множества B. Оказывается, для равномерно невозвратного множества B

$$\mathbf{P}_x\{L_B < \infty\} = 1 \qquad \text{для всех } x \in B.$$

Это следует из представления ограниченной функции $U(x, B)$ как конечного математического ожидания $\mathbf{M}_x\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} I(\{X_n \in B\})\Big)$.

Если множество невозвратно, то не обязательно вероятность нахождения в нем X_n стремится к нулю при $n \to \infty$. Достаточно взять всё пространство E, для которого $\mathbf{P}_\lambda\{X_n \in E\} = 1$.

В общем случае цепь Маркова может не быть ни возвратной, ни невозвратной. Для этого достаточно, чтобы функция $U(x, A)$ переменного x при фиксированном A принимала как конечные, так и бесконечные значения. Однако для ψ-неприводимой цепи реализуется только одна из этих возможностей.

Теорема 9. *ψ-неприводимая цепь Маркова либо возвратна, либо невозвратна.*

Доказательство. Предположим, что цепь Маркова $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ с переходной вероятностью $P(\cdot, \cdot)$ не является возвратной. Построим явно покрытие множества E равномерно невозвратными множествами.

Так как определение возвратности для стохастического ядра $P(\cdot, \cdot)$ не выполняется, должны существовать точка $x^* \in E$ и множество $A \in \mathcal{E}^+$, для которых $U(x^*, A) < \infty$. Рассмотрим измеримое множество $A_* = \{x\colon U(x, A) = \infty\} \in \mathcal{E}$. Предположение $\psi(A_*) > 0$ ведёт, в силу ψ-неприводимости, к неравенству $P_n(x^*, A_*) > 0$ для некоторого натурального n. Но тогда мы имели бы

$$U(x^*, A) \geqslant \int\limits_E P_n(x^*, dw) U(w, A) \geqslant \int\limits_{A_*} P_n(x^*, dw) U(w, A) = \infty.$$

Следовательно, $\psi(A_*) = 0$. Рассмотрим измеримые множества $A_r = A \cap \{x\colon U(x, A) \leqslant r\}$, $r = 1, 2, \ldots$. Последовательность множеств A_r,

$r \geqslant 1$, возрастает и имеет пределом $\bigcup\limits_{r=1}^{\infty} A_r = A \setminus A_*$. Поскольку $\psi(A) > 0$, из свойства монотонности вероятности найдётся такое число r, для которого $\psi(A_r) > 0$. Тогда известным уже способом устанавливается оценка

$$U(x, A_r) < 1 + r, \qquad x \in E.$$

Наконец, введём множества $\bar{A}_r(m) = \left\{x\colon \sum\limits_{n=0}^{m} P_n(x, A_r) > m^{-1}\right\}$, $m = 1, 2, \ldots$, при этом $x \in \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \bar{A}_r(m)$ тогда и только тогда, когда $L(x, A_r) > 0$. Поскольку $\psi(A_r) > 0$, из определения ψ-неприводимости имеем $E = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \bar{A}_r(m)$. Это значит, что последовательность множеств $\bar{A}_r(m)$, $m = 0, 1, \ldots$ образует покрытие множества E. Покажем, что каждое множество $A_r(m)$ невозвратно. Это следует из цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} m(1+r) &\geqslant mU(x, A_r) \geqslant \\ &\geqslant \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=j}^{\infty} P_n(x, A_r) = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_E P_n(x, dw) \sum_{j=1}^{n} P_j(w, A_r) \geqslant \\ &\geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\bar{A}_r(m)} P_n(x, dw) \sum_{j=1}^{m} P_j(w, A_r) \geqslant m^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, \bar{A}_r(m)). \end{aligned}$$

Доказательство завершено. □

Теорема 10. *Пусть ψ-неприводимое стохастическое ядро $P(\cdot, \cdot)$ невозвратно. Тогда любое минорантное множество A является равномерно невозвратным.*

Доказательство. Пусть множества A_1, A_2, … равномерно невозвратны и образуют покрытие множества E, причём $U(x, A_i) \leqslant M_i$, $i \geqslant 1$. Определим функцию

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{I(x \in A_i)}{2^i M_i}, \qquad x \in E.$$

Тогда $g(x) > 0$ и

$$\int\limits_E U(x, dy) g(y) \leqslant 1$$

всюду на E. Пусть C есть ν_M-минорантное множество. Тогда, в силу ψ-неприводимости, для достаточно большого n и $x \in C$

$$\int_E P_{M+n}(x, dy)g(y) \geqslant \gamma = \int_C \nu_M(dy) \int_E P_n(y, dz)g(z) > 0.$$

Наконец,

$$\int_E U(x, dy)g(y) \geqslant \sum_{m=0}^{\infty} \int_E P_{m+M+n}(x, dy)g(y) \geqslant \gamma U(x, C).$$

Итак, мы доказали ограниченность функции $U(x, C)$, а следовательно, и равномерную невозвратность минорантного множества C. $\square$

Библиографические источники: [8, Глава 3], [13, Глава 8].

2.5. Инвариантные и стационарные распределения

Среди всех распределений вероятностей $\lambda(\cdot)$ на $(E, \mathcal{E})$ выделяют распределение $\pi(\cdot)$ (если такое существует), обладающее свойством

$$\pi(A) = \int_E \pi(dx)P(x, A), \qquad A \in \mathcal{E}. \tag{2.8}$$

Взяв $\pi(\cdot)$ в качестве начального распределения, получим

$$\mathbf{P}_\pi\{X_n \in A\} = \int_E \pi(dx)P_n(x, A) = \int_E \pi(dx) \int_E P(x, dw)P_{n-1}(w, A) =$$
$$= \int_E \pi(dw)P_{n-1}(w, A) = \mathbf{P}_\pi\{X_{n-1} \in A\} = \ldots = \pi(A).$$

Аналогично устанавливается, что величина

$$\mathbf{P}_\pi\{X_n \in A_0, X_{n+1} \in A_1, \ldots, X_{n+m} \in A_m\}$$

не зависит от n. В этом случае марковская цепь $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ называется *стационарной*.

Всякая σ-конечная мера $\pi(\cdot)$, удовлетворяющая уравнению (2.8) и условию $\pi(A) < \infty$ хотя бы для одного множества $A \in \mathcal{E}^+$, называется *инвариантной*. При этом класс инвариантных мер, соответствующих данному стохастическому ядру $P(\cdot,\cdot)$, может оказаться пустым. Очевидно, домножением инвариантной меры на положительную константу мы получаем снова инвариантную меру.

Определение 9. *Марковская цепь $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ называется* положительной*, если она ψ-неприводима и обладает инвариантной вероятностной мерой. Марковская цепь $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ называется* нулевой*, если она ψ-неприводима, но инвариантная мера не подчинена условию $\pi(E) < \infty$.*

Всякая положительная цепь Маркова является также и возвратной. Действительно, из предположения о невозвратности цепи следует, что для любого равномерно невозвратного множества A из покрытия E равномерно невозвратными множествами можно написать:

$$k\pi(A) = \sum_{n=1}^{k} \int_E \pi(dw) P_n(w, A) \leqslant M,$$

где M определяется условием $U(x, A) \leqslant M$, $x \in E$. Левая часть неравенства обязана оставаться ограниченной с ростом k, что возможно, только если $\pi(A) = 0$. По свойству полуаддитивности вероятности отсюда следует, что $\pi(E) = 0$ и мера E не может быть вероятностью.

Приведём без доказательства следующее важное утверждение.

Теорема 11. *Пусть $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ — ψ-неприводимая цепь Маркова. Тогда существует единственная с точностью до постоянного множителя инвариантная мера π (возможно, лишь σ-конечная), которая: 1) эквивалентна максимальной определяющей неприводимость мере $\psi(\cdot)$, 2) для любых множеств A, $\psi(A) > 0$ и $B \in \mathcal{E}$ удовлетворяет уравнению*

$$\pi(B) = \int_A \pi(dw) \mathbf{M}_w \Big(\sum_{k=1}^{\tau_A} I\{X_k \in B\} \Big).$$

Интересно отметить физическую интерпретацию инвариантной меры. Выберем множество $A \in \mathcal{E}$ с $\psi(A) > 0$. Предположим, что начальное состояние X_0 цепи выбирается случайно во множестве A исходя из распределения вероятностей $\pi_A(\cdot) = \pi(\cdot)(\pi(A))^{-1}$. Тогда $\pi(B)$ можно рассматривать как среднее время, проведённое цепью во множестве B до первого возвращения в множество A.

Если цепь нулевая, то имеет место следующий результат.

Теорема 12. *Пусть $P(\cdot, \cdot)$ — апериодическое нулевое возвратное ядро с инвариантной мерой $\pi(\cdot)$. Тогда для любого начального распределения $\lambda(\cdot)$ и любого положительного ε будет*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{E}} \int\limits_E \lambda(dx) P_n(x, A)/(\pi(A) + \varepsilon) = 0.$$

Для практического применения теоремы 12 к конкретному множеству A желательно знать, что $\pi(A) < \infty$. Это можно гарантировать для минорантных множеств. Действительно, пусть множество A обладает свойством $\pi(A) < \infty$, а множество C — ν_M-минорантное. Тогда определение инвариантности приводит к соотношениям

$$\infty > \pi(A) = \int\limits_E \pi(dx) P_{M+n}(x, A), \qquad n = 0, 1, \ldots .$$

Но

$$\int\limits_E \pi(dx) P_{M+n}(x, A) \geqslant \int\limits_C \pi(dx) \int\limits_E P_M(x, dy) P_n(y, A) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_C \pi(dx) \int\limits_E \nu_M(dy) P_n(y, A).$$

В силу π-неприводимости найдётся n, такое что

$$\int\limits_E \nu_M(dy) P_n(y, A) > 0.$$

Следовательно, $\pi(C) < \infty$.

Библиографические источники: [8, Глава 5], [13, Глава 10].

Глава 3. Применение к задачам управления

3.1. Задача об обслуживании конфликтных потоков в классе циклических алгоритмов

Имеется $m < \infty$ конфликтных входных потоков Π_1, Π_2, $\ldots$, Π_m. Многие реальные потоки обладают следующей особенностью: интервалы между поступлением требований могут быть зависимы и иметь различный закон распределения. Поэтому получить математическое описание входного потока в виде совокупности конечномерных распределений интервалов между моментами поступления требований не удаётся. Однако для транспортных потоков иногда возможно выделить «медленные» и «быстрые» машины, причём «медленные» машины образуют рекуррентный поток с абсолютно-непрерывной функцией распределения $A_j(t)$ (с плотностью $a_j(t)$) интервалов между «медленными» машинами, а «быстрые» машины маневрируют и совершают обгоны при возможности. Догнав движущуюся группу с «медленной» машиной во главе, «быстрая» машина движется вместе с группой, дожидаясь случая для обгона. Обозначим $\tau'_{j,n}$, $n = 1, 2, \ldots$ моменты поступления «медленных» машин по потоку Π_j к стоп-линии перекрёстка. Моменты поступления машин i-ой группы располагаются между моментами $\tau'_{j,n}$ и $\tau'_{j,n+1}$. Будем считать, тем не менее, что все требования n-ой группы поступают одновременно в момент τ_n. Тогда нелокальное описание входного потока Π_j будет иметь вид $\{(\tau'_{j,n}, \eta'_{j,n}); n = 0, 1, \ldots\}$, где $\eta'_{j,n}$ — число машин в группе с n-ой «медленной» машиной. Предположим, что интервалы $\tau'_{j,n} - \tau'_{j,n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ независимы и одинаково распределены с плотностью $a_j(t)$, а размеры групп $\eta'_{j,n}$, $n = 1, 2, \ldots$ также независимы и одинаково распределены. Распределение размера группы задано производящей функцией $f_j(z) = \sum\limits_{b=1}^{\infty} z^b \mathbf{P}\{\eta'_{j,n} = b\}$. Таким образом, в качестве математической модели входного потока выбираем неординарный рекуррентный поток.

Требования потока Π_j помещаются в накопитель O_j неограниченного объёма. Обслуживание требований осуществляется единственным прибором с $2m$ состояниями $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, $\ldots$, $\Gamma^{(2m)}$. В состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$

обслуживаются требования только из очереди O_j. В состоянии $\Gamma^{(2j)}$ осуществляется акт переналадки с целью разрешения конфликтности. Длительность пребывания в состоянии $\Gamma^{(r)}$ равна T_r, $r = 1, 2, \ldots, 2m$. Обслуживание требований осуществляется в классе циклических алгоритмов, то есть смена состояния обслуживающего устройства происходит по схеме $\Gamma^{(1)} \to \Gamma^{(2)} \to \ldots \to \Gamma^{(2m)} \to \Gamma^{(1)} \to \ldots$.

Длительности обслуживания требований могут быть зависимыми величинами с различными законами распределения. Поэтому для задания процесса обслуживания используем потоки насыщения Π'_1, Π'_2, $\ldots$, Π'_m. При состоянии прибора $\Gamma^{(2j-1)}$ поток насыщения Π'_j содержит ℓ_j требований за время T_{2j-1}, а при прочих состояниях — 0 требований.

Предполагается, что все случайные величины далее заданы на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Будем наблюдать за системой в моменты $\tau_0 = 0$, τ_1, $\ldots$ смены состояний обслуживающего устройства. Пусть Γ_0 — состояние обслуживающего прибора в момент 0. Обозначим Γ_n состояние обслуживающего устройства на промежутке $(\tau_{n-1}, \tau_n]$, $\varkappa_{j,n}$ — число требований в очереди O_j в момент τ_n, $\zeta_{j,n}$ — оставшееся время до поступления следующей после τ_n группы требований потока Π_j, $\eta_{j,n}$ — число поступивших за промежуток $(\tau_n, \tau_{n+1}]$ требований потока Π_j, $\xi_{j,n}$ — число требований потока насыщения Π'_j на промежутке $(\tau_n, \tau_{n+1}]$. Введём векторы $\varkappa_n = (\varkappa_{1,n}, \varkappa_{2,n}, \ldots, \varkappa_{m,n})$, $\zeta_n = (\zeta_{1,n}, \zeta_{2,n}, \ldots, \zeta_{m,n})$, $\eta_n = (\eta_{1,n}, \eta_{2,n}, \ldots, \eta_{m,n})$.

Обозначим $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}\}$ множество состояний обслуживающего устройства. Введем отображение $u(\cdot)\colon \Gamma \to \Gamma$ равенствами $u(\Gamma^{(r)}) = \Gamma^{(r+1)}$, $1 \leqslant r < 2m$ и $u(\Gamma^{(2m)}) = \Gamma^{(1)}$. Тогда динамика обслуживающего устройства описывается рекуррентным по $n = 0, 1, \ldots$ соотношением

$$\Gamma_{n+1} = u(\Gamma_n). \tag{3.1}$$

Введем отображение $v(\cdot)\colon \Gamma \to \{T_1, T_2, \ldots, T_{2m}\}$ равенством $v(\Gamma^{(r)}) = T_r$. Тогда последовательность моментов наблюдения порождается рекуррентным соотношением

$$\tau_{n+1} = \tau_n + v(\Gamma_{n+1}), \qquad n = 0, 1, \ldots. \tag{3.2}$$

При экстремальной стратегии обслуживания длина очереди изменяется по закону

$$\varkappa_{j,n+1} = \max\{0, \varkappa_{j,n} + \eta_{j,n} - \xi_{j,n}\}. \tag{3.3}$$

Выясним вид условного распределения величин $(\eta_{j,n-1}, \zeta_{j,n})$. Пусть $X = \{0, 1, \ldots\}^m$ — m-мерная неотрицательная целочисленная решётка,

$R_+^m = \{(t_1, t_2, \ldots, t_m)\colon t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0, \ldots, t_m \geqslant 0\}$, $x^0 \in X$, $x^1 \in X$, …, $x^n \in X$, $t^0 \in R_+^m$, $t^1 \in R_+^m$, …, $t^n \in R_+^m$, $x^i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_m^i)$, $t^i = (t_1^i, t_2^i, \ldots, t_m^i)$, $\Gamma^{(r_i)} \in \Gamma$, $0 \leqslant i \leqslant n$. В силу предположения о независимости и рекуррентности входных потоков имеем:

$$\mathbf{P}\left(\big\{\eta_{n-1} = x^n, \zeta_n < t^n\big\}\Bigg|\bigcap_{i=0}^{n-1}\big\{\Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_i = x^i, \zeta_i = t^i\big\}\right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \mathbf{P}\big(\big\{\eta_{j,n-1} = x_j^n, \zeta_{j,n} < t_j^n\big\}\big|\big\{\Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r_{n-1})}, \zeta_{j,n} = t_j^n\big\}\big), \quad (3.4)$$

а совместные условные распределения пар $(\eta_{j,n-1}, \zeta_{j,n})$ находятся из двойного преобразования Лапласа – Стильтьеса

$$\sum_{b=0}^{\infty} \int_0^{\infty} z^b e^{-sy}\, d_y \mathbf{P}\big(\big\{\eta_{j,n-1} = b, \zeta_{j,n} < y\big\}\big|\big\{\Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r)}, \zeta_{j,n-1} = t\big\}\big) =$$

$$= \mathbf{M}(z^{\eta_{j,n-1}} e^{-s\zeta_{j,n}}\big|\big\{\Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r)}, \zeta_{j,n-1} = t\big\}\big). \quad (3.5)$$

Событие $\big\{\Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r)}, \zeta_{j,n-1} = t\big\}$ при $t > T_{r+1}$ ($t > T_1$, если $r = 2m$) означает, что за промежуток времени T_{r+1} требования не поступают. В этом случае величина $\eta_{j,n-1}$ принимает значение 0, а оставшееся время до поступления группы требований по потоку Π_j уменьшается на величину T_{r+1}, $\zeta_{j,n} = t - T_{r+1}$. Поэтому

$$\mathbf{M}(z^{\eta_{j,n-1}} e^{-s\zeta_{j,n}}\big|\big\{\Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r)}, \zeta_{j,n-1} = t\big\}\big) =$$

$$= \begin{cases} e^{-s(t-T_{r+1})}, & r < 2m, t > T_{r+1}; \\ e^{-s(t-T_1)}, & r = 2m, t > T_1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Предположим теперь, что $t \leqslant T_{r+1}$. Рассмотрим вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины e_1, e_2, … с плотностью распределения $a_j(u)$, положим $S_0 = 0$, $S_b = S_{b-1} + e_b$, $b = 1$, 2, … . Будем рассматривать величины e_1, e_2, … как интервалы до поступления следующих после момента $\tau_n + t$ групп требований. Неравенства

$$S_b \leqslant T_{r+1} - t < S_{b+1}, \qquad S_{b+1} - (T_{r+1} - t) < y$$

имеют место, если за оставшееся время до переключения состояния прибора поступают $b \geqslant 0$ групп потока Π_j, а время до прихода следующей группы не превышает величины $y > 0$. Введём функцию

$$G_b(t,y) = \mathbf{P}\{S_b \leqslant t < S_{b+1} < t+y\}.$$

Обозначим $A^{*b}(t)$ и $a_j^{*b}(t)$ соответственно функцию распределения и плотность распределения величины S_b. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{S_b \leqslant t < S_{b+1} < t+y\} = \\ = \mathbf{P}\{S_b \leqslant t < S_b + e_{b+1} < t+y\} = \\ = \int_0^t a_j^{*b}(s)(A_j(t+y-s) - A_j(t-s+0))\,ds\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}(z^{\eta_{j,n-1}} e^{-s\zeta_{j,n}} | \{\Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r)}, \zeta_{j,n-1} = t\}) = \\ &= \int_0^\infty \sum_{b=0}^\infty (f_j(z))^{b+1} e^{-sy}\,d_y G_b(T_{r+1}-t, y) = \\ &= \int_0^\infty e^{-sy}\,d_y\Big(\sum_{b=0}^\infty (f_j(z))^{b+1} G_b(T_{r+1}-t,y)\Big) = \\ &= \int_0^\infty e^{-sy}\Big(\int_0^{T_{r+1}-t} a_j(T_{r+1}-t+y-y_1)\sum_{b=0}^\infty (f_j(z))^{b+1} a_j^{*b}(y_1)\,dy_1\Big)\,dy = \\ &= \int_0^{T_{r+1}-t}\Big(\int_0^\infty e^{-sy} a_j(T_{r+1}-t+y-y_1)\,dy\Big)\sum_{b=0}^\infty (f_j(z))^{b+1} a_j^{*b}(y_1)\,dy_1.\end{aligned}$$

При $r = 2m$ вместо $r+1$ следует писать 1.

Наконец, условная вероятность $\mathbf{P}(\{\xi_{j,n} = \ell_j\}|\{\Gamma_n = \Gamma^{(2j-2)}\}) = 1$, $\mathbf{P}(\{\xi_{j,n} = 0\}|\{\Gamma_n = \Gamma^{(r)}\}) = 1$ при $r \neq 2j-2$ и

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\{\xi_n = x^n\}\Big|\bigcap_{i=0}^n \{\Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_i = x^i, \zeta_i = t^i\}\Big) = \\ = \prod_{j=1}^m \mathbf{P}\big(\{\xi_{j,n} = x_j^n\}\big|\{\Gamma_n = \Gamma^{(r_n)}\}\big). \quad (3.7)\end{aligned}$$

Маркированный точечный процесс

$$\{(\tau_n, \Gamma_n, \kappa_{1,n}, \ldots, \kappa_{m,n}, \zeta_{1,n}, \ldots, \zeta_{m,n}); n = 0, 1, \ldots\}$$

описывает изменение состояния обслуживающего устройства и длин очередей при обслуживании конфликтных потоков в классе циклических алгоритмов управления.

Теорема 13. *Последовательности*

$$\{(\Gamma_n, \kappa_{1,n}, \ldots, \kappa_{m,n}, \zeta_{1,n}, \ldots, \zeta_{m,n}); n = 0, 1, \ldots\}, \tag{3.8}$$

$$\{(\Gamma_n, \kappa_{j,n}, \zeta_{j,n}); n = 0, 1, \ldots\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, m \tag{3.9}$$

являются однородными цепями Маркова.

Доказательство. Докажем марковость последовательности (3.9). В силу рекуррентных соотношений (3.1), (3.3), (3.10) и (3.7) имеем:

$$\begin{gathered}
\mathbf{P}\biggl(\Bigl\{\Gamma_n = \Gamma^{(r_n)}, \kappa_{j,n} = w, \zeta_{j,n} < t\Bigr\}\biggm| \bigcap_{i=0}^{n-1} \Bigl\{\Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_{j,i} = x_i, \zeta_{j,i} = t_i\Bigr\}\biggr) = \\
= \sum_{b_1=0}^{\infty} \mathbf{P}\bigl(\{\eta_{j,n-1} = b_1, \zeta_{j,n} < t\} | \bigl\{\Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r_{n-1})}, \zeta_{j,n-1} = t_{n-1}\bigr\}\bigr) \times \\
\times \sum_{b_2=0}^{\infty} \mathbf{P}\bigl(\bigl\{\xi_{j,n-1} = b_2\bigr\} | \bigl\{\Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r_{n-1})}\bigr\}\bigr) \times \\
\times \mathbf{P}\bigl\{\Gamma^{(r_n)} = u(\Gamma^{(r_{n-1})}), w = \max\{x_{n-1} + b_1 - b_2, 0\}\bigr\}.
\end{gathered} \tag{3.10}$$

Такое же выражение имеет вероятность события $\bigl\{\Gamma_n = \Gamma^{(r_n)}, \kappa_{j,n} = w, \zeta_{j,n} < t\bigr\}$ при условии $\bigl\{\Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r_{n-1})}, \kappa_{j,n-1} = x_{n-1}, \zeta_{j,n-1} = t_{n-1}\bigr\}$. Марковость доказана. □

Пусть $E = \Gamma \times \{0, 1, \ldots\} \times [0, \infty)$, и $\mathcal{E}$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая множества вида $\{(\Gamma^{(r)}, x, y) \colon y < y_1\}$, $r = 1, 2, \ldots, 2m$, $x = 0, 1, \ldots$, $-\infty < y_1 < \infty$. Тогда измеримое пространство $(E, \mathcal{E})$ является пространством состояний цепи Маркова

$$\{(\Gamma_n, \kappa_{j,n}, \zeta_{j,n}); n = 0, 1, \ldots\}. \tag{3.11}$$

при каждом $j = 1, 2, \ldots, m$. В следующем разделе будет изучено предельное поведение цепи (3.11). Назовём множество $\{(\Gamma^{(r)}, x, y) \colon y \geqslant 0\} \in \mathcal{E}$ для краткости и образности $(\Gamma^{(r)}, x)$-слоем.

3.2. Анализ предельных свойств длин очередей

Введём обозначение для вероятностей из соотношения (3.6)

$$v_j(b, y; r, t) = \mathbf{P}(\{\eta_{j,n-1} = b, \zeta_{j,n} < y\} | \{\Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r)}, \zeta_{j,n-1} = t\}).$$

Положим $r \oplus 1 = r + 1$ при $r < 2m$, $2m \oplus 1 = 1$. Из соотношения (3.10) находим для переходной вероятности цепи Маркова (3.11): при $j > 1$

$$P((\Gamma^{(r)}, x, t); \{(\Gamma^{(s)}, w, y) \colon y < y_1\}) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{b=0}^{\ell_j - x} v_j(b, y_1; r, t), & r = 2j-2, w = 0, s = r \oplus 1; \\ v_j(w + \ell_j - x, y_1; r, t), & r = 2j-2, w \geqslant 1, s = r \oplus 1; \\ v_j(w - x, y_1; r, t), & r \neq 2j-2, s = r \oplus 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3.12}$$

При $j = 1$ надо в соотношении (3.12) заменить $2j - 2$ на $2m$.

Теорема 14. *Пусть $a_j(t) > 0$ для всех $t \geqslant 0$. Определим меру $\varphi(\cdot)$ на $(E, \mathcal{E})$ соотношением*

$$\varphi\{(\Gamma^{(s)}, w, y) \colon y < y_1\} = \begin{cases} y_1, & s = 2j-1, w = 0, y_1 > 0; \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда стохастическое ядро (3.12) ν-неприводимо. Каждое множество вида $\{(\gamma, x, y) \colon 0 \leqslant y < \infty\}$, $\gamma \in \Gamma$, $x = 0,\ 1,\ \ldots$ является ψ-положительным.

Доказательство. Рассмотрим произвольное состояние $(\Gamma^{(r)}, x, t)$. Пусть $A_{\tilde{y}} = \{(\Gamma^{(2j)}, 0, y) \colon y < \tilde{y}\}$. За время t, оставшееся до поступления новой группы требований, успеет обслужиться k требований и на это потребуется конечное число циклов обслуживания. Непосредственно перед поступлением группы требований потока Π_j длина очереди O_j составит $x_1 = (x - k)$ требований. С положительной вероятностью $f_j'(0)$ после поступления этой группы размер очереди составит $x_1 + 1$. Из предположения теоремы о неотрицательности плотности $a_j(u)$ находим, что существует положительная вероятность одновременного наступления следующих событий. До поступления новой группы требований пройдет время, достаточное для ухода оставшихся $x_1 + 1$ требований. Непосредственно в момент окончания того такта обслуживания, когда очереди

O_j становится пустой, оставшееся время до поступления новой группы требований станет меньше $\tilde{y}$. Следовательно, $L((\Gamma^{(r)}, x, t); A_{\tilde{y}}) > 0$. $\square$

Из вида переходной вероятности (3.12) следует, что в пространстве состояний E содержится $2m$-цикл E_0, E_1, ..., E_{2m-1} с

$$E_r = \{(\Gamma^{(r+1)}, x, y)\colon x = 0, 1, \ldots; y \geqslant 0\}.$$

Укажем также некоторые минорантные множества для переходной вероятности (3.12).

Теорема 15. *Пусть $a_j(t) > 0$ — непрерывная функция для всех $t > 0$. Каждое множество вида*

$$\{(\Gamma^{(r)}, x, y)\colon 0 \leqslant y_1 \leqslant y < y_2\}, \qquad \Gamma^{(r)} \in \Gamma,\ x = 0, 1, \ldots,\ y_1 > 0 \quad (3.13)$$

с достаточно малой величиной $y_2 - y_1$ является минорантным.

Доказательство. Установим, что множество $\{(\Gamma^{(r)}, x, y)\colon y_1 \leqslant y < y_2\}$ является минорантным при $0 \leqslant y_1 < y_2 < T_{r\oplus 1}$. Рассмотрим событие следующего вида: после поступления одного требования (спустя время y) за оставшееся время $T_{r\oplus 1} - y$ поступает ровно одно требование через промежуток времени s_1, $T_{r\oplus 1} - \Delta < y + s_1 < T_{r\oplus 1}$, а следующее требование поступает через время s_2, $\Delta + (T_{r\oplus 1} - (y + s_1)) \leqslant s_2 < \Delta + (T_{r\oplus 1} - (y + s_1)) + y_3$ для достаточно малого Δ. Тогда оставшееся время $y_2 = s_2 - (T_{r\oplus 1} - (y + s_1))$ до следующей группы в момент $T_{r\oplus 1}$ удовлетворяет ограничениям $\Delta \leqslant y_2 < \Delta + y_3$ (рис. 3.1). Если $\Gamma^{(r\oplus 1)} \neq \Gamma^{(2j-1)}$,

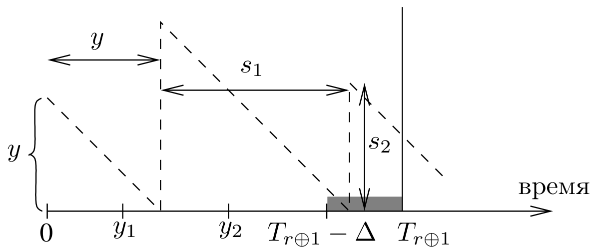

Рис. 3.1. К построению минорантного множества. Пунктирная линия отражает процесс оставшегося времени ожидания до поступления группы требований. Пояснения в основном тексте

то требования из очереди O_j на этом такте не обслуживаются и цепь из состояния $(\Gamma^{(r)}, x, y)$ перейдет за один шаг в $(\Gamma^{(r\oplus 1)}, x+2)$-слой. Имеем

$$P((\Gamma^{(r)}, x, y); \{(\Gamma^{(r\oplus 1)}, x+2, y_2) \colon \Delta \leqslant y_2 < \Delta + y_3\}) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{T_{\oplus 1}-\Delta-y}^{T_{r\oplus 1}-y} (A_j(\Delta + T_{r\oplus 1} - y - s_1 + y_3) - A_j(\Delta + T_{r\oplus 1} - y - s_1)) \times$$

$$\times\, a(s_1)(p(1;j))^2\, ds_1 \geqslant \delta \int\limits_0^{\Delta} A_j(y_3 + s_1) - A_j(\Delta + s_1)\, ds_1,$$

где $p(1;j) = \mathbf{P}\{\eta'_{j,i} = 1\}$ и $\delta = \min\limits_{T_{r\oplus 1}-\Delta-y \leqslant s_1 \leqslant T_{r\oplus 1}-y} a(s_1) > 0$ из непрерывности и положительности $a_j(t)$. Функция

$$G(y) = \delta \int\limits_0^{\Delta} A_j(y+s) - A_j(\Delta+s)\, ds, \qquad y \geqslant \Delta$$

задаёт некоторую меру на полуоси $[\Delta, \infty)$. Следовательно, множество $\{(\Gamma^{(r)}, x, y) \colon y_1 \leqslant y < y_2\}$ является ν_1-минорантным с мерой $\nu_1(\cdot)$, порожденной на $(\Gamma^{(r\oplus 1)}, x+2)$-слое функцией распределения $G(y)$.

Если, напротив, $\Gamma^{(r\oplus 1)} = \Gamma^{(2j-1)}$, то аналогичная последовательность событий переведёт цепь в $(\Gamma^{(r\oplus 1)}, \min\{0, x+2-\ell_j\})$-слой и минорантная мера $\nu_1(\cdot)$ порождается той же функцией распределения на этом слое.

Для справедливости приведённого рассуждения критично, чтобы было $y_2 < T_{r\oplus 1}$, иначе не найдётся достаточно малое $\Delta > 0$. Однако, если $y_2 = T_{r\oplus 1}$ и $\Gamma^{(r\oplus 1)} \not\in {}^j\Gamma$, то из любой точки $(\Gamma^{(r)}, x, y) \in \{(\Gamma^{(r)}, x, y) \colon 0 \leqslant y_1 \leqslant y < y_2\}$ минорантное множество $\{(\Gamma^{(r\oplus 1)}, x + 1, y) \colon 0 \leqslant y_3 \leqslant y < y_4\}$, $0 < y_3 < y < y_4 < T_{r\oplus 1\oplus 1}$ достигается за один шаг с вероятностью, не меньшей $\delta'(y_4 - y_3)$ с

$$\delta' = \min\{a_j(s_1) \colon y_3 \leqslant s_1 \leqslant y_4 + T_{r\oplus 1} - y_1\}.$$

Поэтому множество $\{(\Gamma^{(r)}, x, y) \colon 0 \leqslant y_1 \leqslant y < y_2\}$ является ν_2-минорантным по теореме 5. Аналогично разбирается случай $\Gamma^{(r\oplus 1)} \in {}^j\Gamma$.

Наконец, если $T_{r\oplus 1} \leqslant y_1 < y_2 < T_{r\oplus 1\oplus 1}$, то нужно снова применить теорему 5, выбрав в качестве m из теоремы номер такта, на котором оставшееся время до поступления группы требований обращается в ноль. $\square$

Лемма 1. *Пусть для всех $\Gamma^{(r)} \in \Gamma$, $x = 0, 1, \ldots$ и независимо от начального распределения*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\Gamma_n = \Gamma^{(r)}, \kappa_{j,n} = x\} = 0.$$

Тогда средняя длина очереди $\mathbf{M}\kappa_{j,n} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Поскольку

$$\mathbf{M}\kappa_{j,n} \geqslant (N+1)\mathbf{P}\{\kappa_{j,n} > N\} =$$

$$= (N+1)\Big(1 - \sum_{r=1}^{2m}\sum_{x=0}^{N} \mathbf{P}\{\Gamma_n = \Gamma^{(r)}, \kappa_{j,n} = x\}\Big),$$

из $\mathbf{P}\{\Gamma_n = \Gamma^{(r)}, \kappa_{j,n} = x\} \to 0$ при $n \to \infty$ для всех r, x следует, что для достаточно больших n будет $\mathbf{M}\kappa_{j,n} > N$. В силу произвольности N получаем утверждение леммы. □

Обозначим $\lambda_j^{-1} = \int\limits_0^\infty t a_j(t)\,dt$ среднее время между поступлениями групп, $\bar{\lambda}_j = \lambda f_j'(1)$ интенсивность поступления требований потока Π_j. Положим

$$Q_{j,n}(r, x, y) = \mathbf{P}\{\Gamma_n = \Gamma^{(r)}, \kappa_{j,n} = x, \zeta_{j,n} < y\}.$$

Теорема 16. *Пусть плотность $a_j(t)$ положительна и непрерывна при всех $t > 0$. Если не существует стационарного распределения цепи Маркова (3.11), то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\Gamma_n = \Gamma^{(r)}, \kappa_{j,n} = x\} = 0$$

независимо от распределения случайного элемента $(\Gamma_0, \kappa_{j,i}, \zeta_{j,0})$.

Доказательство. Каждое множество вида $\{(\Gamma^{(r)}, x, y)\colon y < y_1\}$ можно покрыть *конечным* числом минорантных множеств вида (3.13). В силу ψ-неприводимости (теорема 14) цепь Маркова (3.11) может быть либо возвратной нулевой, либо невозвратной. Если цепь возвратная нулевая, то вероятность любого минорантного множества стремится к нулю, по теореме 12 и замечанию после неё. Если цепь невозвратна, предел вероятности попадания в любое минорантное множество равен нулю вследствие теоремы 10. Итак, в любом из двух случаев

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\Gamma_n = \Gamma^{(r)}, \kappa_{j,n} = x, \zeta_{j,n} < y_1\} = 0.$$

Поэтому

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\Gamma_n = \Gamma^{(r)}, \kappa_{j,n} = x\} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta_{j,n} \geqslant y_1\}. \tag{3.14}$$

Из теории процессов восстановления известно, что существует предельное распределение для остаточного времени ожидания восстановления в процессе восстановления [10, Гл. XI, § 4]. Следовательно, величину в правой части (3.14) можно сделать как угодно малой, устремляя $y_1 \to \infty$. □

Следующая теорема содержит фактически достаточное условие существования стационарного распределения цепи Маркова (3.11). Обозначим $T_0 = T_1 + T_2 + \ldots + T_{2m}$ длительность полного цикла работы прибора.

Теорема 17. *Пусть $\bar{\lambda}_j T_0 - \ell_j < 0$. Тогда средняя длина $\mathbf{M}\kappa_{j,n}$ очереди O_j ограничена по n.*

Доказательство. Достаточно доказать теорему для случая $j = 1$, поскольку случай произвольного j сводится к этому перенумерацией потоков. Изучим поведение при $n \to \infty$ функции

$$\Psi_n(z, s, r) = \sum_{x=0}^{\infty} \int_0^{\infty} z^x e^{-sy}\, dQ_{1,n}(r, x, t) = \mathbf{M}(I(\Gamma_n = \Gamma^{(r)}) z^{\kappa_{1,n}} e^{-s\zeta_{1,n}}),$$

являющейся производящей функцией по z и преобразованием Лапласа – Стильтьеса по s от вероятностей $Q_{1,n}(r, x, t)$, $x = 0,\ 1,\ \ldots,\ t \geqslant 0$ при каждом $r = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2m$. Пусть сначала $r \neq 2m$. Тогда по формуле повторного математического ожидания имеем

$$\Psi_{n+1}(z, s, r+1) = \mathbf{M}\big[I(\Gamma_{n+1} = \Gamma^{(r+1)}) z^{\kappa_{1,n+1}} e^{-s\zeta_{1,n+1}}\big] =$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{M}(z^{\kappa_{1,n}+\eta_{1,n}} e^{-s\zeta_{1,n}} | \{\Gamma_n = \Gamma^{(r)}, \kappa_{1,n} = x, \zeta_{1,n} = t\})\, dQ_{1,n}(r, x, t) =$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dQ_{1,n}(r, x, t) \Big\{ z^x \Big(I(t > T_{r+1}) e^{-s(t - T_{r+1})} +$$

$$+ I(t \leqslant T_{r+1}) \int_0^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} e^{-sy}\, d_y G_b(T_{r+1} - t, y) \Big) \Big\} =$$

$$= \mathbf{M}\big[I(\Gamma_n = \Gamma^{(r)}) z^{\kappa_{1,n}} q_1(z,s;T_{r+1},\zeta_{1,n})\big], \quad (3.15)$$

где

$$q_j(z,s;\theta,t) = I(t>\theta)e^{-s(t-\theta)} + I(t \leqslant \theta)\int\limits_0^\infty \sum_{b=0}^\infty (f_1(z))^{b+1} e^{-sy}\, d_y G_b(\theta - t, y).$$

Аналогично при $r = 2m$ находим

$$\Psi_{n+1}(z,s,1) = \mathbf{M}\big[I(\Gamma_{n+1} = \Gamma^{(1)}) z^{\kappa_{1,n+1}} e^{-s\zeta_{1,n+1}}\big] =$$

$$= \sum_{x=0}^\infty \int\limits_0^\infty \mathbf{M}(z^{\max\{0,\kappa_{1,n}+\eta_{1,n}-\ell_1\}} e^{-s\zeta_{1,n+1}} | \{\Gamma_n = \Gamma^{(2m)}, \kappa_{1,n} = x, \zeta_{1,n} = t\}) \times$$

$$\times\, dQ_{1,n}(2m,x,t) = \sum_{x=0}^\infty \int\limits_0^\infty dQ_{1,n}(2m,x,t) \times$$

$$\times\, \mathbf{M}(z^{\kappa_{1,n}+\eta_{1,n}-\ell_1} e^{-s\zeta_{1,n+1}} | \{\Gamma_n = \Gamma^{(2m)}, \kappa_{1,n} = x, \zeta_{1,n} = t\}) +$$

$$+ \sum_{x=0}^{\ell_1-1} \int\limits_0^\infty dQ_{1,n}(2m,x,t) \mathbf{M}(\big[z^{\max\{0,\kappa_{1,n}+\eta_{1,n}-\ell_1\}} - z^{\kappa_{1,n}+\eta_{1,n}-\ell_1}\big] \times$$

$$\times\, e^{-s\zeta_{1,n+1}} | \{\Gamma_n = \Gamma^{(2m)}, \kappa_{1,n} = x, \zeta_{1,n} = t\}) =$$

$$= z^{-\ell_1} \mathbf{M}\big[I(\Gamma_n = \Gamma^{(2m)}) z^{\kappa_{1,n}} q_1(z,s;T_1,\zeta_{1,n})\big] + B_n(z,s), \quad (3.16)$$

где

$$B_n(z,s) = \sum_{x=0}^{\ell_1-1} \int\limits_0^\infty \mathbf{M}(\big[z^{\max\{0,\kappa_{1,n}+\eta_{1,n}-\ell_1\}} - z^{\kappa_{1,n}+\eta_{1,n}-\ell_1}\big] \times$$

$$\times\, e^{-s\zeta_{1,n+1}} | \{\Gamma_n = \Gamma^{(2m)}, \kappa_{1,n} = x, \zeta_{1,n} = t\})\, dQ_{1,n}(2m,x,t).$$

Заменяя $n+1$ на $n+2m$ в соотношении (3.16) получаем

$$\Psi_{n+2m}(z,s,1) = B_{n+2m-1}(z,s) +$$

$$+ z^{-\ell_1} \mathbf{M}\big[I(\Gamma_{n+2m-1} = \Gamma^{(2m)}) z^{\kappa_{1,n+2m-1}} q_1(z,s;T_1,\zeta_{1,n+2m-1})\big].$$

Для краткости положим $n+2m-2 = k$. Снова воспользовавшись формулой повторного математического ожидания, найдём:

$$\mathbf{M}\big[I(\Gamma_{k+1} = \Gamma^{(2m)}) z^{\kappa_{1,k+1}} q_1(z,s;T_1,\zeta_{1,k+1})\big] =$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{M}(z^{\eta_{1,k}} q_1(z,s;T_1,\zeta_{1,k+1}) | \{\Gamma_k = \Gamma^{(2m-1)}, \kappa_{1,k} = x, \zeta_{1,k} = t\}) \times$$
$$\times z^x \, dQ_{1,k}(2m-1,x,t).$$

При $t > T_{2m}$ имеем $\eta_{1,k} = 0$ и $\zeta_{1,k+1} = t - T_{2m}$. В этом случае

$$\mathbf{M}(z^{\eta_{1,k}} q_1(z,s;T_1,\zeta_{1,k+1}) | \{\Gamma_k = \Gamma^{(2m-1)}, \kappa_{1,k} = x, \zeta_{1,k} = t\}) =$$
$$= q_1(z,s;T_1,t-T_{2m}) = \big(I(t - T_{2m} > T_1) e^{-s(t-T_{2m}-T_1)} +$$
$$+ I(t - T_{2m} \leqslant T_1) \int_0^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} e^{-sy} \, dG_b(T_1 - t + T_{2m}, y)\big) =$$
$$= I(t > T_1 + T_{2m}) e^{-s(t-T_1-T_{2m})} + I(T_{2m} < t \leqslant T_1 + T_{2m}) \times$$
$$\times \int_0^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} e^{-sy} \, dG_b(T_1 + T_{2m} - t, y).$$

Для $t \leqslant T_{2m}$ получаем

$$\mathbf{M}(z^{\eta_{1,k}} q_1(z,s;T_1,\zeta_{1,k+1}) | \{\Gamma_k = \Gamma^{(2m-1)}, \kappa_{1,k} = x, \zeta_{1,k} = t\}) =$$
$$= \int_0^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} q_1(z,s;T_1,y) \, d_y G_b(T_{2m} - t, y) =$$
$$= \int_0^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} I(y > T_1) e^{-s(y-T_1)} \, d_y G_b(T_{2m} - t, y) +$$
$$+ \int_0^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} I(y \leqslant T_1) \int_0^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} (f_j(z))^{c+1} \times$$
$$\times e^{-su} \, d_u G_c(T_1 - y, u) \, d_y G_b(T_{2m} - t, y) =$$
$$= I(t \leqslant T_{2m}) \int_0^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} e^{-sy} \, d_y G_b(T_1 + T_{2m} - t, y).$$

Действительно,

$$\int_0^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} I(y > T_1) e^{-s(y-T_1)} \, d_y G_b(T_{2m} - t, y)$$

есть производящая функция по z и преобразование Лапласа – Стильтьеса по s для числа вызовов, поступивших на промежутке длительностью $T_1+T_{2m}-t$, и остаточного времени до поступления вызовов в том случае, если все поступившие вызовы принадлежат первому промежутку длины T_{2m}, а остаточное время y (в конце первого промежутка длины T_{2m}) больше T_1, так что по окончании всего промежутка $T_1+T_{2m}-t$ останется еще время $y-T_1$ до поступления следующей группы вызовов. Слагаемое

$$\int_0^\infty \sum_{b=0}^\infty (f_1(z))^{b+1} I(y \leqslant T_1) \int_0^\infty \sum_{c=0}^\infty (f_j(z))^{c+1} \times \\ \times e^{-su}\, d_u G_c(T_1-y,u)\, d_y G_b(T_{2m}-t,y)$$

есть производящая функция по z и преобразование Лапласа – Стильтьеса по s для числа вызовов, поступивших на промежутке длительностью $T_1+T_{2m}-t$, и остаточного времени до поступления вызовов в том случае, когда b вызовов, $b \geqslant 0$, поступают на первом промежутке длины $T_{2m}-t$, а остальные вызовы, числом c, поступают на втором промежутке длины T_1. Для этого необходимо, чтобы остаточное время y (в конце первого промежутка длины T_{2m}) было меньше T_1.

Итак,

$$\mathbf{M}(z^{\eta_{1,k}} q_1(z,s;T_1,\zeta_{1,k+1}) | \{\Gamma_k = \Gamma^{(2m-1)}, \kappa_{1,k}=x, \zeta_{1,k}=t\}) = \\ = q_1(z,s;T_1+T_{2m},t)$$

и

$$\mathbf{M}\big[I(\Gamma_{k+1} = \Gamma^{(2m)}) z^{\kappa_{1,k+1}} q_1(z,s;T_1,\zeta_{1,k+1})\big] = \\ = \mathbf{M}\big[I(\Gamma_k = \Gamma^{(2m-1)}) z^{\kappa_{1,k}} q_1(z,s;T_1+T_{2m},\zeta_{1,k})\big].$$

Повторяя этот процесс $m-2$ раз, получим рекуррентное соотношение

$$\Psi_{n+2m}(z,s,1) = B_{n+2m-1}(z,s) + \\ + z^{-\ell_1} \mathbf{M}\big[I(\Gamma_n = \Gamma^{(1)}) z^{\kappa_{1,n}} q_1(z,s;T_1+\ldots+T_{2m},\zeta_{1,n})\big].$$

Рассматривая $g = 1,\ 2,\ \ldots$ полных циклов работы обслуживающего устройства, получим:

$$\Psi_{n+2mg}(z,s,1)=B_{n+2mg-1}(z,s)+\\
+\tilde{B}_{n+2m(g-1)-1}(z,s)+\ldots+\tilde{B}_{n+2m-1}(z,s)+z^{-g\ell_1}\times\\
\times\mathbf{M}\big[I(\Gamma_n=\Gamma^{(1)})z^{\kappa_{1,n}}q_1(z,s;gT_0,\zeta_{1,n})\big], \quad (3.17)$$

где при $k=1,\,2,\,\ldots,\,g-1$ обозначено

$$\tilde{B}_{n+2mk-1}(z,s)=\sum_{x=0}^{\ell_1-1}\int_0^\infty dQ_{1,n+2mk-1}(2m,x,t)\times\\
\times\mathbf{M}\Big(\big[z^{\max\{0,\kappa_{1,n+2mk-1}+\eta_{1,n+2mk-1}-\ell_1\}}-z^{\kappa_{1,n+2mk-1}+\eta_{1,n+2mk-1}-\ell_1}\big]\times\\
\times q_1(z,s;(g-k)T_0,\zeta_{1,n+2mk-1})\big|\{\Gamma_{n+2mk-1}=\Gamma^{(2m)},\\
\kappa_{1,n+2mk-1}=x,\zeta_{1,n+2mk-1}=t\}\Big).$$

Подставим $s=0$ в соотношение (3.17). Получим

$$\Psi_{n+2mg}(z,0,1)=B_{n+2mg-1}(z,0)+\tilde{B}_{n+2m(g-1)-1}(z,0)+\ldots+\\
+\tilde{B}_{n+2m-1}(z,0)+z^{-g\ell_1}\mathbf{M}\big[I(\Gamma_n=\Gamma^{(1)})z^{\kappa_{1,n}}q_1(z,0;gT_0,\zeta_{1,n})\big], \quad (3.18)$$

где

$$q_1(z,0;gT_0,t)=I(t>gT_0)+I(t\leqslant gT_0)\sum_{b=0}^{\infty}(f_1(z))^{b+1}G_b(gT_0-t,\infty)=\\
=1+\Big\{\sum_{b=0}^{\infty}(f_1(z))^{b+1}G_b(gT_0-t,\infty)-1\Big\}I(t\leqslant gT_0).$$

Если $z>1$, функция

$$\sum_{b=0}^{\infty}(f_1(z))^{b+1}G_b(t,\infty)$$

возрастает по t. Поэтому имеет место оценка

$$z^{-g\ell_1}q_1(z,0;gT_0,t)\leqslant z^{-g\ell_1}\sum_{b=0}^{\infty}(f_1(z))^{b+1}G_b(gT_0,\infty).$$

Далее

$$\frac{d}{dz}\Big(z^{-g\ell_1}\sum_{b=0}^{\infty}(f_1(z))^{b+1}G_b(gT_0,\infty)\Big)\Big|_{z=1} =$$

$$= -g\ell_1 + \sum_{b=0} f_1'(1)(b+1)G_b(gT_0,\infty) = g(f_1'(1)g^{-1}H(gT_0) - \ell_1). \quad (3.19)$$

Здесь $H(t) = \mathbf{M}(\inf\{k\colon S_k \geqslant t\})$ — функция восстановления [2]. В теории восстановления доказывается существование предела, в нашем случае, $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}H(t) = \lambda_1$. Поэтому можно выбрать достаточно большое натуральное число g так что производная (3.19) будет отрицательной в силу условия $\bar{\lambda}_1 T_0 - \ell_1 < 0$. Тогда найдется $z_0 > 1$, такое что

$$z_0^{-g\ell_1} q_1(z_0, 0; gT_0, t) \leqslant R_+ = z_0^{-g\ell_1} q_1(z_0, 0; gT_0, 0) < 1.$$

Применяя эту оценку к равенству (3.18) при $z = z_0$, получаем неравенство

$$\Psi_{n+2mg}(z_0, 0, 1) \leqslant R_+\Psi_n(z_0, 0, 1) + \tilde{B}, \quad \tilde{B} > 0.$$

Отсюда можно заключить, что последовательность $\Psi_n(z_0, 0, 1)$, $n = 0, 1, \ldots$ ограничена некоторой константой M_1. Но тогда имеем $|\Psi_n(z, 0, 1)| \leqslant$ $\leqslant M_1$ в круге $|z| \leqslant z_0$. Из равенства (3.15) имеем:

$$\Psi_{n+1}(z, 0, r+1) = \mathbf{M}\left[I(\Gamma_n = \Gamma^{(r)})z^{\kappa_{1,n}} q_1(z, 0; T_{r+1}, \zeta_{1,n})\right] \leqslant$$
$$\leqslant q_1(z_0, 0; T_{r+1}, 0)\Psi_n(z, 0, r).$$

Можно заключить о равномерной по n и r ограниченности всех производящих функций $\Psi_n(z, 0, r)$ некоторой константой M в круге $|z| \leqslant z_0$. В силу известной формулы Коши,

$$\mathbf{M}\kappa_{1,n} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{|z-1|=\rho} (z-1)^{-2}\sum_{r=1}^{2m}\Psi_n(z, 0, r)\,dz \leqslant \frac{2mM}{\rho}.$$

Теорема доказана. □

Полученное достаточное условие существования стационарного распределения цепи Маркова (3.9) легко проверяемо и имеет простой физический смысл: максимальная пропускная способность обслуживающего устройства должна превышать среднее число поступающих требований за достаточно большой интервал времени.

Список литературы

1. Боровков А.А. Эргодичность и устойчивость случайных процессов. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 440 с.

2. Боровков А.А. Теория вероятностей: Учебное пособие. — Изд. 5-е, сущ. перераб. и доп. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 656 с.

3. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. — 568 с.

4. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. — Изд. 4-е, испр. — М.: Издательство ЛКИ, 2007. — 400 с.

5. Зорин А.В., Федоткин М.А. Методы Монте-Карло для параллельных вычислений. — М.: Издательство Московского университета, 2013. — 192 с. — (Серия «Суперкомпьютерное образование»).

6. Калашников В.В. Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций. — М.: Наука, 1978. — 248 с. — (Серия «Теория и методы системного анализа»).

7. Карлин С. Основы теории случайных процессов. — М.: Мир, 1971. — 536 с.

8. Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. — М.: Мир, 1989. — 207 с.

9. Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 608 с.

10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х томах. — М.: Мир, 1984. — Т. 1: 528 с., Т. 2: 738 с.

11. Чжун К. Однородные цепи Маркова. М.: Мир, 1964.

12. Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х кн. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 2004. — Кн. 1: 520 с., Кн. 2: 408 с.

13. Meyn S.P., Tweedie R.L. Markov chains and stochastic stability. — 2nd ed. — London: Springer-Verlag, 1993. — 566 p.

Предметный указатель

ВВЕДЕНИЕ В ОБЩИЕ ЦЕПИ МАРКОВА

Авторы:
Андрей Владимирович **Зорин**
Владимир Александрович **Зорин**
Екатерина Вадимовна **Пройдакова** и др.

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Уч.-изд. л. 3,2. Усл. печ. л. 2,79. Заказ № . Тираж 50 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского университета
им. Н.И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37